Substitutie: Uitgewerkte voorbeelden

Eenvoudige substituties:

1. $\int e^{3x+2}dx$

   Stel $t = 3x+2$

   Dan is $dt = 3dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{3}$

   Dus: $\int e^{3x+2}dx = \dfrac{1}{3}\int e^t dt = \dfrac{1}{3}e^t + C = \dfrac{1}{3}e^{3x+2} + C$

2. $\int \dfrac{dx}{5x-6}$

   Stel $t = 5x-6$

   Dan is $dt = 5dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{5}$

   Dus: $\int \dfrac{dx}{5x-6} = \dfrac{1}{5}\int \dfrac{dt}{t} = \dfrac{1}{5}\ln|t| + C = \dfrac{1}{5}\ln|5x-6| + C$

Type: $\int g(f(x))f'(x)dx$

3. $\int \dfrac{\sin(4x)}{\sqrt{3+\cos(4x)}}dx$

   Omdat $D(3+\cos(4x)) = -\sin(4x).4 = -4\sin(4x)$ en de factor $\sin(4x)$ ook optreedt als factor in het integrandum ligt de volgende substitutie voor de hand:

   Stel: $t = 3+\cos(4x)$

   Dan is: $dt = -4\sin(4x)dx \Rightarrow \sin(4x)dx = -\dfrac{dt}{4}$

   De integraal wordt:

   $$\int \frac{\sin(4x)}{\sqrt{3+\cos(4x)}}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2}\sqrt{t} + C = -\frac{1}{2}\sqrt{3+\cos(4x)} + C$$

4. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

   Omdat: $D(a^2-x^2) = -2x$ en x optreedt als factor in de teller ligt volgende substitutie voor de hand.

   Stel: $t = a^2-x^2$

   Dan is: $dt = -2xdx \Rightarrow xdx = -\dfrac{dt}{2}$

   De integraal wordt dus:

   $$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{a^2-x^2} + C$$

(Vergeet niet van in de laatste stap terug over te gaan op de oorspronkelijke veranderlijke).

5. $\int \frac{x^3 dx}{(x^4+4)^{10}}$

Stel: $t = x^4 + 4 \Rightarrow dt = 4x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = \frac{dt}{4}$

$$\int \frac{x^3 dx}{(x^4+4)^{10}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^{10}} = \frac{1}{4}\int t^{-10} dt = -\frac{t^{-9}}{36} + C = -\frac{1}{36(x^4+4)^9} + C$$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{e^{2x}+1}}{e^{-2x}} dx = \int \sqrt[3]{e^{2x}+1}\, e^{2x} dx$

Stel: $t = e^{2x} + 1 \Rightarrow dt = 2e^{2x} dx \Rightarrow e^{2x} dx = \frac{dt}{2}$

$$\int \frac{\sqrt[3]{e^{2x}+1}}{e^{-2x}} dx = \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{t}\, dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{t^4} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(e^{2x}+1)^4} + C$$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{tg(x)}} \frac{dx}{\cos^2(x)}$

$(tg(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, dus stel: $t = tg(x)$ …….

Integrandum met rationale machten:

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx$

De optredende rationale machten van x zijn:

$x^{\frac{1}{2}}$ en $x^{\frac{3}{4}}$

Omdat het kleinste gemeen veelvoud van de noemers gelijk is aan $kgv(2,4) = 4$ zal de volgende substitutie de rationale machten doen verdwijnen:

Stel: $x = t^4$

Dan is:

$dx = 4t^3 dt$

$\sqrt{x} = (t^4)^{\frac{1}{2}} = t^2$

$\sqrt[4]{x^3} = (t^4)^{\frac{3}{4}} = t^3$

En dus wordt de integraal herleidt tot:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx = \int \frac{t^2}{1+t^3} 4t^3 dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1} dt$$

Dit is de integraal van een rationale functie. Voor het vervolg verwijs ik naar de volgende sessie.