Integratie van rationale functies: Uitgewerkte voorbeelden

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$ (vervolg oefening 8 bij substitutiemethode)

   $kgv(2,4)=4$ dus stel: $x=t^4$

   Dan is:

   $dx=4t^3dt, \sqrt{x}=(t^4)^{\frac{1}{2}}=t^2, \sqrt[4]{x^3}=(t^4)^{\frac{3}{4}}=t^3$

   En dus wordt de integraal herleidt tot:

   $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx=\int \frac{t^2}{1+t^3}4t^3dt=4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt$

   Dit is de integraal van een rationale functie. Voor het integreren van een rationale functie beschikken we over een algoritme.

   Stap1: Is $\text{graad}(T)\geq \text{graad}(N)$? Ja, $5>3$, dus deling doorvoeren:

t^5	t^3+1
$-\underline{t^5 \quad + \quad t^2}$ $-t^2$ = rest	t^2 =quotient

   Hiermee wordt de integraal:

$$4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt=4\int (t^2-\frac{t^2}{t^3+1})dt$$
$$=4\int t^2dt-4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt$$
$$=\frac{4}{3}t^3-4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt$$

   Door de substitutie $u=t^3+1$, kunnen we de resterende integraal heel vlug uitrekenen.

   ($du=3t^2dt \Rightarrow t^2dt=\frac{du}{3}$)

$$=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\int \frac{du}{u}=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln|u|+C=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right|+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|+C$$

   Let op: het is uitzonderlijk dat je via een eenvoudige substitutie de integraal van en rationale functie kan berekenen. De algemene methode wordt geïllustreerd in de volgende voorbeelden.

2. $\int \frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2(x-2)}dx$ (Oef 1(55))

Stap 1: Is $\text{graad}(T)\geq \text{graad}(N)$? Neen ($2<5$), ga over naar stap 2.

Stap 2: Ontbinding van de noemer is reeds gedaan (de discriminant van de factor x^2+x+1 is $D=1-4=-3<0$).

$$N=(x-2)(x^2+x+1)^2$$

De splitsing in partieel breuken ziet er dus als volgt uit:

$$\frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

Op gelijke noemer zetten geeft: (let op kgv nemen van de noemers)

$$\frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2(x-2)}=\frac{A(x^2+x+1)^2+(Bx+C)(x-2)(x^2+x+1)+(Dx+E)(x-2)}{(x^2+x+1)^2(x-2)}$$

$=$...(haken uitwerken en sorteren volgens machten van x)

$$=\frac{(A+B)x^4+(2A-B+C)x^3+(3A-B-C+D)x^2+(2A-2B-C-2D+E)x+A-2C-2E}{(x^2+x+1)^2(x-2)}$$

Door gelijkstellen van de coëfficiënten bekomen we dan het volgende stelsel:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B+C=0 \\ 3A-B-C+D=1 \\ 2A-2B-C-2D+E=2 \\ A-2C-2E=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ C=-2A+B=-3A \\ D=1-3A+B+C=1-7A \\ E=2-2A+2B+C+2D=4-21A \\ 7A-2(4-21A)=-1 \Leftrightarrow 49A=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{7} \\ B=-\frac{1}{7} \\ C=-\frac{3}{7} \\ D=0 \\ E=1 \end{cases}$$

Door invullen van deze waarden herleidt de te berekenen integraal zich dus tot:

$$\int\frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2(x-2)}dx=\int\left(\frac{1}{7}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{7}\frac{x+3}{x^2+x+1}+\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{7}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{7}\int\frac{x+3}{x^2+x+1}dx+\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{7}\ln|x-2|-\frac{1}{7}\int\frac{x+3}{x^2+x+1}dx+\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

We berekenen de 2 resterende integralen nu afzonderlijk en illustreren hiermee de algemene methode om dat type integraal te berekenen.

$$J_1=\int\frac{x+3}{x^2+x+1}dx$$

Om dit type integraal (in de noemer een veelterm van de 2de graad met negatieve discriminant, in de teller een veelterm van de 1ste graad) te berekenen gaan we als volgt te werk. Schrijf in de teller de afgeleide van de 2de graadsveelterm van de noemer over. Dit is $(x^2+x+1)'=2x+1$. Vermenigvuldig dan deze term met een factor zodat je de coëfficiënt van x van de teller terugvindt en corrigeer met een constante zodat ook de constante term klopt. Doe dus:

$$J_1=\int\frac{x+3}{x^2+x+1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+3-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{5}{2}}{x^2+x+1}dx$$

Splits nu de integraal op:

$$J_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{5}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

De 1ste term kan je onmiddellijk berekenen door de substitutie $t=x^2+x+1$:

$$J_1=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{5}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

Voor de 2^de^ term passen we de volgende techniek toe. (Achterliggende reden is toe te werken naar de basisintegraal $\int \frac{1}{1+u^2}\,du = bgtg(u) + C$)

Vorm met de 1^ste^ 2 termen van de noemer een volkomen kwadraat en corrigeer dan de constante term: $x^2 + x + 1 = (x+\frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4} = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

Zet dan de constante term $\frac{3}{4}$ voorop:

$$J_1 = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}+1\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{5}{2}\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1}\,dx$$

Stel nu $u = \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. Dan is $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \Leftrightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$. Doorvoeren van de substitutie levert:

$$J_1 = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{10}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{5\sqrt{3}}{3}bgtg(u) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{5\sqrt{3}}{3}bgtg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Voor de 2^de^ integraal:

$$J_2 = \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$

gaan we analoog tewerk als bij de 2^de^ term van daarnet:

$$J_2 = \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$$
$$= \int \frac{1}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2}dx$$
$$= \int \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right)^2}dx$$
$$= \frac{16}{9}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2}dx$$

Stel $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$.

$$J_2 = \frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}du = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{\left(u^2+1\right)^2}du = \frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{1}{2}(bgtg(u)+\frac{u}{u^2+1})$$

dus:

$$J_2 = \frac{4\sqrt{3}}{9}(bgtg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1})$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}(bgtg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\sqrt{3}\frac{2x+1}{(2x+1)^2+3})$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}bgtg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{4}{3}\frac{2x+1}{4x^2+4x+4}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}bgtg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

De laatste integraal was immers gegeven in de opgave.
(Indien deze niet gegeven is moet je de recursiebetrekking uit de cursus p 129 gebruiken:

$$2\beta I_{\beta+1} = \frac{u}{(1+u^2)^\beta}+(2\beta-1)I_\beta ,$$

waarbij $I_\beta = \int \frac{1}{(1+u^2)^\beta}du, I_1 = \int \frac{1}{1+u^2}du = bgtg(u)$

Voor $\beta = 1$ vinden we inderdaad: $2I_2 = \frac{u}{1+u^2}+I_1 = \frac{u}{1+u^2}+bgtg(u)$)

Combineren van de deelresultaten geeft uiteindelijk voor de oorspronkelijke integraal:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2(x-2)}dx$$

$$=\frac{1}{7}\ln|x-2|-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{5\sqrt{3}}{3}bgtg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})\right)+\frac{4\sqrt{3}}{9}bgtg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+C$$

$$=\frac{1}{7}\ln|x-2|-\frac{1}{14}\ln|x^2+x+1|-\frac{5\sqrt{3}}{21}bgtg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{4\sqrt{3}}{9}bgtg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+C$$

$$=\frac{1}{7}\ln|x-2|-\frac{1}{14}\ln|x^2+x+1|+\frac{(28-15)\sqrt{3}}{63}bgtg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+C$$

$$=\frac{1}{7}\ln|x-2|-\frac{1}{14}\ln|x^2+x+1|+\frac{13\sqrt{3}}{63}bgtg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+C$$