Integratie van rationale functies: basistype

Bij integratie van rationale functies kom je heel dikwijls het volgende type van integraal tegen.

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^{\beta}} dx$$

In de teller staat een 1ste graadsveelterm en in de noemer een macht van een 2de graadsveelterm met **D<0**.

Er is een vaststaande methode om zo'n integraal te berekenen (zie ook p129 in de cursus of in de bundel "Integralen.pdf" op Minerva). Ik illustreer deze nog eens met een extra voorbeeld.

Voorbeeld:

$$\int \frac{3x+2}{3x^2+2x+1} dx$$

De eerste stap is altijd: schrijf in de teller de afgeleide van de 2de graadsveelterm uit de noemer ($(3x^2+2x+1)' = 6x+2$). Vermenigvuldig nu deze veelterm met een factor en tel er een getal bij zodat je de oorspronkelijk teller bekomt en splits de integraal dan op:

$$\int \frac{\tfrac{1}{2}(6x+2)+1}{3x^2+2x+1} dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+1} dx + \int \frac{1}{3x^2+2x+1} dx$$

De eerste integraal kan je onmiddellijk berekenen door de substitutie $3x^2+2x+1 = t$. Je krijgt:

$$\tfrac{1}{2}\ln(3x^2+2x+1) + \int \frac{1}{3x^2+2x+1} dx$$

Voor de 2de integraal ga je als volgt tewerk: Zet eerst de coëfficiënt van x^2 voorop.

$$\int \frac{1}{3x^2+2x+1} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2/3x+1/3} dx$$

Met de eerste 2 termen van de noemer maak je een volkomen kwadraat. Dan corrigeer je door de constante die je ingevoerd hebt er terug vanaf te trekken:

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1/3)^2+1/3-1/9} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1/3)^2+2/9} dx$$

Zet nu de resulterende constante buiten haken, dan bekom je:

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{2}{9}\left[\frac{(x+1/3)^2}{2/9}+1\right]} dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1/3}{\sqrt{2}/3}\right)^2+1} dx$$

D.m.v van de volgende substitutie kunnen we nu de integraal berekenen: $u = \dfrac{x+1/3}{\sqrt{2}/3} = \dfrac{3x+1}{\sqrt{2}}$

Hieruit volgt: $du = \dfrac{3}{\sqrt{2}}dx$ en dus $dx = \dfrac{\sqrt{2}}{3}du$. De integraal wordt dus:

$$\frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{\sqrt{2}}{2}bgtg(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}bgtg(\frac{3x+1}{\sqrt{2}})$$

De oorspronkelijke integraal is dus gelijk aan:

$$\tfrac{1}{2}\ln(3x^2+2x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}bgtg(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}) + C$$

<u>Opmerking</u>:

Als de macht van de 2^de^ graadsveelterm in de noemer groter is dan 1 volg je juist dezelfde methode maar dan kom je op het einde wel een integraal uit van de vorm: $I_\beta = \int \dfrac{1}{(u^2+1)^\beta}du$.

Deze integraal zal ofwel gegeven zijn in de opgave of moet je kunnen berekenen via de recursiebetrekking op p129 (die dan zal gegeven zijn):

$$2\beta I_{\beta+1} = (2\beta-1)I_\beta + \frac{u}{(u^2+1)^\beta} \qquad (*)$$

I_1 is een basisintegraal: $I_1 = bgtg(u)$, wil je nu I_2 berekenen dan neem je in (*) $\beta = 1$, dit geeft: $2I_2 = I_1 + \dfrac{u}{(u^2+1)}$ en dus $I_2 = \dfrac{1}{2}I_1 + \dfrac{u}{2(u^2+1)}$.

Wil je I_3 berekenen dan stel je $\beta = 2$, enz…