Berekenen van integralen

1. **Integralen :** 2 soorten

- <u>onbepaalde integraal</u> : resultaat is een functie die maar op een constante na bepaald is, dus de "+ C" niet vergeten. Twee ogenschijnlijk verschillende resultaten kunnen dus wel allebei goed zijn.
- <u>bepaalde integraal</u> : resultaat is een reëel getal, namelijk de georiënteerde oppervlakte ingesloten door de x-as, de grafiek van het integrandum en de verticalen x=a en x=b. Georiënteerde oppervlakte houdt in: + teken daar waar de grafiek boven de x-as en - teken daar waar de grafiek onder de x-as ligt.

2. **Basisintegralen** : Uit het hoofd kennen. Dit lukt beter als je regelmatig oefeningen maakt met de tabel (cursus p.139) naast je.

3. **Rekenregels**: kunnen toepassen. zie tabel (cursus p.139)

   Let op: geen regels uitvinden, er is geen algemene regel voor o.a. de integraal van een product, quotiënt, macht en machtswortel,... zoals bij afleiden. Dit maakt integreren veel moeilijker dan afleiden.

4. **Integratiemethoden**

   <u>Bedoeling van deze methodes</u>: de gegeven integraal **omvormen naar een gemakkelijker te berekenen integraal** en uiteindelijk naar een basisintegraal of een som van basisintegralen.
   Soms moeten meerdere methodes gecombineerd worden in dezelfde opgave of leiden verschillende methodes tot een goed resultaat.

   4.1. **Substitutiemethode**

- Substitutie betekent overgaan op een nieuwe integratieveranderlijke.

- Substituties kunnen op 3 manieren doorgevoerd worden:

  - Ofwel: x gelijk stellen aan een functie van de nieuwe veranderlijke zodat het integrandum vereenvoudigd wordt : $x = \mathrm{f}(t)$

  - Ofwel: een uitdrukking in x die optreedt in het integrandum gelijk stellen aan t zodat ook nu het integrandum vereenvoudigt : $\mathrm{g}(x) = t$

    Voor verdere berekeningen moet ook x in functie van t berekend worden door inversie van deze uitdrukking.: $x = g^{-1}(t)$

  - Ofwel een speciale substitutie zoals gebruik van T-formules, meestal zal die substitutie dan gegeven zijn.
    Toepassing: oef 1.29

- Wat te doen bij substitutie:

  1. in het integrandum overal x vervangen in functie van t en zoveel mogelijk vereenvoudigen.
  2. dx vervangen: dx = afgeleide van x naar t * dt
  3. Indien een bepaalde integraal, dan moet je ook de grenzen aanpassen naar de nieuwe veranderlijke!
  4. Nieuwe integraal berekenen.
  5. Indien onbepaalde integraal, het resultaat terug schrijven in functie van de oude veranderlijke.

- Enkele veel voorkomende substituties:

  i. Als de integraal van de volgende vorm is:

  $$I = \int \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))\, g'(x)\, dx$$

  Door de substitutie: $t=g(x)$ (geinverteerd: $x = g^{-1}(t)$) wordt deze integraal herleid tot:

  $$\int f(t)dt$$

  Toepassingen: oef 1.9-17-18-19-26-43-44-45-46-48-49-62-63-64

  ii. Indien verschillende rationale machten van x in het integrandum voorkomen:

  $$x = t^{\mathrm{kgv}(noemers)}$$

  Meestal krijg je na substitutie een integraal van een rationale functie in t. (Hoe je deze moet berekenen zien we verder in § 4.3.)

  Voorbeeld: als de volgende machten voorkomen in het integrandum:

  $$x^{(3/4)}, x^{(1/3)}, x^{(3/2)}$$

  Dan stellen we $x = t^{12}$ want *kgv(4,3,2) = 12*

  Toepassingen: oef 1.10-36-37-57-58-66

  iii. Indien in het integrandum $\sqrt{a^2 - x^2}$ voorkomt, dan kan je proberen met $x = a \sin(t)$ of $x = a \cos(t)$ (naar keuze)
  Toepassingen: oef 1.28-31

  iv. Indien in het integrandum wortels voorkomen, kan je proberen met een substitutie die deze wortels wegwerkt.
  Toepassingen: oef 1.26-38-42-46-56-65

v. Indien het integrandum een rationale functie is van *sin(x)* en *cos(x)* dan kan je de T-formules gebruiken:

De substitutie $t = tg(\frac{x}{2})$ of geïnverteerd $x = 2bgtg(t)$ zet dan de integraal om in een integraal van een rationale functie in *t* (zie § 4.3.).

Je moet hierbij dus $\sin(x)$, $\cos(x)$ en eventueel $tg(x)$ vervangen door de volgende uitdrukkingen:

T-formules:

$$\sin(x) = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1 + tg^2(\frac{x}{2})}$$

$$\cos(x) = \frac{1 - tg^2(\frac{x}{2})}{1 + tg^2(\frac{x}{2})}$$

$$tg(x) = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1 - tg^2(\frac{x}{2})}$$

Toepassingen: oef 1.20-21-39

Andere goniometrische formules bruikbaar bij berekening van integralen:

$$1 - \sin^2(x) = \cos^2(x)$$

$$1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$$

$$1 + tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\sin(2\,t) = 2\,\sin(t)\,\cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$$

4.2. **Partiele integratie (PI)**

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx$$

of:

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = [\, f(x)\, g(x)\,]_a^b - \int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx$$

Wanneer PI gebruiken?

- Essentieel komt het erop neer dat PI bruikbaar is als 1 factor of meerdere factoren samen, die optreden in het integrandum gemakkelijk kunnen geschreven worden als de afgeleide van een functie.

  Toepassingen: oef 1.26-62

- Dit is zeker zo als:

  i. e^x of $e^{(a\,x)}$ als factoren in het integrandum optreden.

  Toepassingen: oef 1.12-13-14-15-16

  ii. $\sin(x)$, $\cos(x)$ of $\sin(a\,x)$, $\cos(a\,x)$ als factoren in het integrandum optreden.

  Toepassingen: oef 1.12-13-14-15-23-24

  iii. integrandum = product van een macht van *x:* $x^k = g'(x)$ en van $\ln(x) = f(x)$.

  Toepassingen: oef 1.11-22

- PI wordt ook gebruikt om recursiebetrekkingen op te stellen tussen integralen.

  Toepassingen: cursus p.129

- PI is ook hetgeen als methode overblijft als de andere methoden geen goed resultaat geven of als je echt niet weet wat gedaan. Neem dan $g(x) = x$

  Toepassingen: oef 1.11-25-30

4.3. **Integratriemethodiek voor rationale functies.**

De uitleg is gedaan voor onbepaalde integralen maar blijft geldig voor bepaalde integralen. Vergeet dan wel niet je grenzen mee te nemen.

Toepassingen: oef 1.32-33-34-35-50-51-52-53-54-55-59-60-61

Om de integraal van een rationale functie te berekenen bestaat er een **vaste methodiek.**

- **Stap 1**. Is $\text{graad}(T) \geq \text{graad}(N)$?

  i. Ja. Deling uitvoeren.
  Resultaat: de integraal herleidt zich tot de som van de integraal van een veelterm (direct te berekenen) en de integraal van een rationale functie met $\text{graad}(T) < \text{graad}(N)$.

  ii. Neen. volgende stap.

- **Stap 2**. Je moet nu de integraal berekenen van een rationale functie met $\text{graad}(T) < \text{graad}(N)$.

  i. **Ontbindt de noemer in factoren.**

  Het resultaat is een product van:
  - factoren van de **1ste graad,** eventueel tot een (gehele) macht verheven.
  - factoren van de **2de graad** met **D<0**, eventueel tot een (gehele) macht verheven.

  ii. **Splits de rationale functie in partiele breuken** (PB)

  D.w.z. schrijf de functie als een som van breuken van de vorm:

$$\frac{A_1}{x-a},\ldots,\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

  Voor alle 1ste graadsfactoren van de noemer, waarbij k = macht van $x-a$ in de ontbinding van de noemer. Voor elke lineaire factor $x-a$ moet je dus evenveel termen schrijven als aangegeven door de macht k. De tellers A_i zijn constanten (=veeltermen van graad 0).

  En van de vorm:

$$\frac{B_1\,x + C_1}{a\,x^2 + b\,x + c}, \ldots, \frac{B_n\,x + C_n}{(a\,x^2 + b\,x + c)^n}$$

  Voor alle 2de graadsfactoren van de noemer, waarbij n = macht van ax^2+bx+c in de ontbinding van de noemer. Voor elke kwadratische factor ax^2+bx+c moet je dus evenveel termen schrijven als aangegeven door de macht n. De tellers $B_i x + C_i$ zijn veeltermen van de 1ste graad.

bvb. Stel dat de ontbinding van de noemer gegeven is door:
$N=(x-2)^2 x^3 (x^2+x+1)$
Dan ziet de splitsing in partiele breuken er als volgt uit:
$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x^2}+\frac{E}{x^3}+\frac{Fx+G}{x^2+x+1}$$

De A-tjes, B-tjes en C-tjes moeten nu nog bepaald worden. De algemene methode om deze te berekenen is als volgt:
Maak van de gevonden som terug 1 rationale functie door alles op gelijke noemer te zetten. Werk de teller uit en sorteer volgens de machten van *x*. Stel nu de zo gevonden coëfficiënten gelijk aan de corresponderende coëfficiënten van de teller van de oorspronkelijke rationale functie. Je bekomt een stelsel vergelijkingen in de A-tjes, B-tjes en C-tjes. Los dit stelsel op en vul de gevonden A,B en C-tjes in in de som van breuken.

iii. **De integraal is nu herleidt naar een som van integralen:**

- van de vorm :
$$\int \frac{A}{(x-a)^l}\,dx$$
Deze zijn direct te integreren want (via substitutie $t=x-a$) te herleiden naar basisintegralen.

- van de vorm :
$$\int \frac{B\,x+C}{(a\,x^2+b\,x+c)^n}\,dx$$
Hiervoor gaan we als volgt te werk:

<u>Geval 1.</u> $B\neq 0$

Zet in de teller **de afgeleide van de kwadratische factor in de noemer** : $2\,a\,x+b$ dus, vermenigvuldig dit met een factor en tel er een getal bij zodat je de teller $B\,x+C$ bekomt:
(doe dus, maar dit moet je natuurlijk niet onthouden : $\frac{B\,(2\,a\,x+b)}{2\,a}+C-\frac{B\,b}{2\,a}$).

Splits de integraal nu nog verder op:

- De 1ste term is van de vorm:
$$\alpha\int \frac{2\,a\,x+b}{(a\,x^2+b\,x+c)^n}\,dx$$
En is via de substitutie $t=a\,x^2+b\,x+c$ direct te berekenen.

- De 2de term is van de vorm:

$$\beta \int \frac{1}{(a\,x^2 + b\,x + c)^n}\,dx = \gamma \int \frac{1}{(x^2 + s\,x + t)^n}\,dx$$

(Zet in de noemer a^n voorop)

Omdat D<0 kunnen we dit via een substitutie brengen naar de vorm $\int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,du$ als volgt:

Vorm **met de 2 eerste termen een volkomen kwadraat**: $\left(x + \frac{s}{2}\right)^2$ corrigeer dit met een term, zodat als je terug uitwerkt je $x^2 + sx + t$ bekomt:

$$x^2 + s\,x + t \;=\; \left(x + \frac{s}{2}\right)^2 + t - \frac{s^2}{4} \;=\; \left(x + \frac{s}{2}\right)^2 + C$$

De substitutie: $u = \dfrac{x + \frac{s}{2}}{\sqrt{C}}$ brengt de integraal in de uiteindelijke vorm.

Deze integraal is een basisintegraal, als n=1, of is te berekenen via de recursieformule uit de cursus p.129. In de praktijk zal voor jullie, als n>1, ofwel deze integraal gegeven zijn of de recursiebetrekking gegeven zijn.

<u>Geval 2.</u> $B = 0$

Pas de techniek toe van de 2de term voor $B \neq 0$.

5. **Oneigenlijke integralen.**

Een **bepaalde** integraal is **oneigenlijk** als 1 of meerdere van de volgende **kenmerken** aanwezig zijn:

- 1 van de grenzen is $\pm\infty$
- 1 van de grenzen is een punt waar het integrandum, niet gedefinieerd is, of waar de functie discontinu is.
- beide grenzen zijn punten waar de functie niet gedefinieerd is, maar tussen deze grenzen is de functie overal gedefinieerd. In dit geval moet je de integraal opsplitsen door een willekeurig tussenliggend punt te gebruiken.
- In het integratie-interval liggen 1 of meerdere punten waar het integrandum niet gedefinieerd is. In dit geval moet je de integraal opsplitsen als een som van integralen waarbij de betreffende punten als grenzen optreden.

Zo’n punten noemen we oneigenlijke punten en we zeggen dat de integraal oneigenlijk is in de ondergrens (ondergrens is een oneigenlijk punt) respectievelijk in de bovengrens (bovengrens is oneigenlijk) of in beide.

Convergentie en divergentie van oneigenlijke integralen:(praktisch)

- Als de waarde van de oneigenlijke integraal een reëel getal is, is deze convergent.

- Als de waarde $\pm\infty$ is, is hij divergent.

- Als de waarde niet bestaat, bestaat ook de integraal niet.

Hoe de waarde van een oneigenlijke integraal berekenen?

- Zoek de oneigenlijke punten t.t.z.punten in het integratie-interval waar de functie niet gedefinieerd is i.h.b zoek de punten α waar:

  $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ of onbestaand

  (Zie vorig hoofdstuk opzoeken Verticale Asymptoten)

- Splits de integraal op zodat alle deze punten als grenzen optreden.

- Bepaal een primitieve van het integrandum m.a.w. bereken de onbepaalde integraal (zonder "+C").

$$F(x) = \int f(x)dx$$

- Pas, eventueel op de verschillende termen van de opsplitsing, de formule toe:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Hierbij moeten de functiewaarden geïnterpreteerd worden als limieten in de volgende gevallen:

  i. Als b een oneigenlijk punt is : $F(b) = \lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} F(x)$

  ii. Als a een oneigenlijk punt is: $F(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} F(x)$

iii. Als b = + ∞ : $F(b) = \lim_{x \to +\infty} F(x)$

iv. Als a = - ∞ : $F(a) = \lim_{x \to -\infty} F(x)$

- Een oneigenlijke integraal kan dus als waarde aannemen:

  - een reëel getal (convergent)
  - $\pm\infty$ (divergent)
  - niet bestaand (integraal bestaat niet)

6. Verduidelijking bij toepassing consumenten- en producentensurplus.

Er is wat onduidelijkheid i.v.m consumenten en producentensurplus, vandaar nog eens kort:

- De prijs die de consument betaalt en die dus de producent ontvangt is p_0 (= de prijs bij marktevenwicht).
- De consumenten die bereid waren om meer te betalen ($p > p_0$ op de vraagcurve $D(p)$) doen dus besparingen want ze moeten maar p_0 betalen. De totaliteit van deze besparingen is het consumentensurplus.
- De producenten die bereid waren om hun product te verkopen aan een lagere prijs dan p_0 ($p < p_0$ op de aanbodscurve $S(p)$) doen extra winst want ze ontvangen meer dan ze dachten te ontvangen. De totaliteit van deze winsten is het producentensurplus.