Stellingen over afgeleiden

De Stelling van Rolle + gevolg

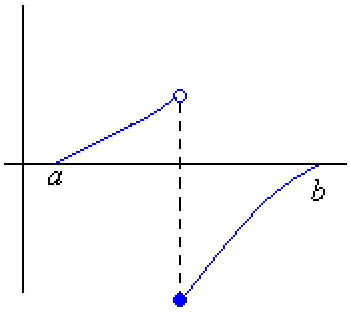
Formulering:
Als f **afleidbaar** is **op het open interval**]a,b[en **continu op het gesloten interval** [a,b] en bovendien is $\boxed{f(a) = f(b) = 0}$
dan bestaat er minstens 1 getal x_0 tussen a en b waarvoor $f'(x_0) = 0$

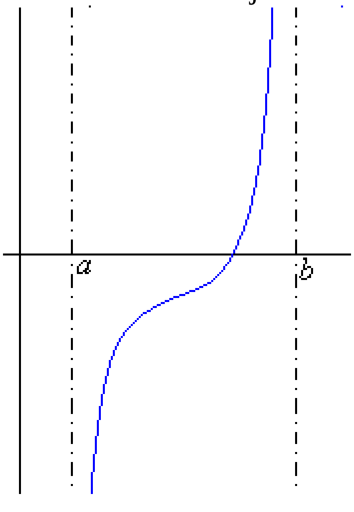
Interpretatie: Onder de gegeven voorwaarden bestaat er dus minstens 1 punt op de grafiek van f waarin de **raaklijn evenwijdig is met de x-as**.

Intuïtief betekent de stelling: Als je van een punt op de x-as naar een ander punt op de x-as wil gaan op een continue en afleidbare manier dan moet je als je eerst stijgt terug dalen en in het hoogste punt is de raaklijn horizontaal of als je eerst daalt moet je terug stijgen met nu in het laagste punt een horizontale raaklijn.

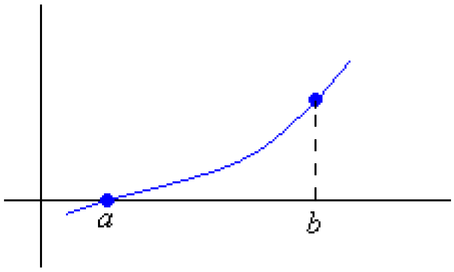
Dit wordt geïllustreerd in de volgende animatie:

Opmerkingen:
- De functie f hoeft niet afleidbaar te zijn in de randpunten a en b. De stelling geldt dus ook als f in a en/of in b een verticale raaklijn heeft. De functie in de vorige animatie heeft trouwens een verticale raaklijn in a.
- Als 1 van de voorwaarden niet voldaan is dan geldt de conclusie niet noodzakelijk:
    - f is niet afleidbaar in]a,b[: f heeft een hoekpunt of een keerpunt in]a,b[. De 2de grafiek in Figuur 4.17 p 84 is een voorbeeld met een hoekpunt. Schets zelf een voorbeeld voor een keerpunt.
    - f is niet continu is [a,b]: Een aantal voorbeelden vind je hieronder:





○ $f(a) \neq f(b)$: begin- en eindpunt bevinden zich niet op dezelfde hoogte:



Let op: Er bestaan wel functies waarvoor 1 van de voorwaarden niet voldaan is en waar de grafiek toch een punt met een horizontale raaklijn bevat. Kan je er zelf zo een schetsen? De stelling beweert echter niets over zo'n gevallen.

Bewijs:
Omdat de functie continu is op het gesloten interval [a,b] bereikt ze haar maximum en minimum (zie stelling 3.8.: stelling van Weierstrass). Noem x_m het punt waar de functie het kleinst is en x_M het punt waar de functiewaarde het grootst is. Omdat $f(a) = f(b) = 0$ geldt dan $f(x_m) \leq 0 \leq f(x_M)$.
De rest van het bewijs kan je lezen op p 84. Laat ons nog verduidelijken waarom $f'_L(x_M) \geq 0$ en $f'_R(x_M) \leq 0$.
Omdat in x_M de functiewaarde het grootst is zal in een ander punt, bvb in $x_M + h$ de functiewaarde kleiner of gelijk zijn: $f(x_M + h) \leq f(x_M)$. De teller is dus in de uitdrukking voor beide afgeleiden ≤ 0. Voor de linkerafgeleide is $h < 0$, als teken van de linkerafgeleide bekom je dus: $\frac{-}{-} = +$, zodat $f'_L(x_M) \geq 0$. Voor de rechterafgeleide is $h > 0$, en dus bekom je $\frac{-}{+} = -$, dus $f'_R(x_M) \leq 0$.

Gevolg:

Als f **afleidbaar** is **op het open interval**]a,b[en **continu op het gesloten interval** [a,b] en de functiewaarden in a en b zijn gelijk: $\boxed{f(a) = f(b)}$
dan bestaat er minstens 1 getal x_0 tussen a en b waarvoor $f'(x_0) = 0$

Interpretatie: Wat is het verschil met de stelling van Rolle?
Bij Rolle zijn de functiewaarden in a en b allebei 0, in het gevolg zijn de functiewaarden allebei gelijk aan een bepaald reëel getal C. Bij Rolle liggen de punten (in a en b) allebei op de x-as (dus hoogte 0) in het gevolg op hoogte C. We kunnen nu heel gemakkelijk overgaan van de ene situatie naar de andere situatie door eenvoudigweg de grafiek verticaal te verschuiven over een afstand C. Dit wordt geïllustreerd in de volgende animatie.
En hierop is ook het bewijs gebaseerd: wiskundig betekent verticaal verschuiven over een afstand C, in elk punt C aftrekken van de functiewaarde. De verschoven functie is dus $g(x) = f(x) - C$.

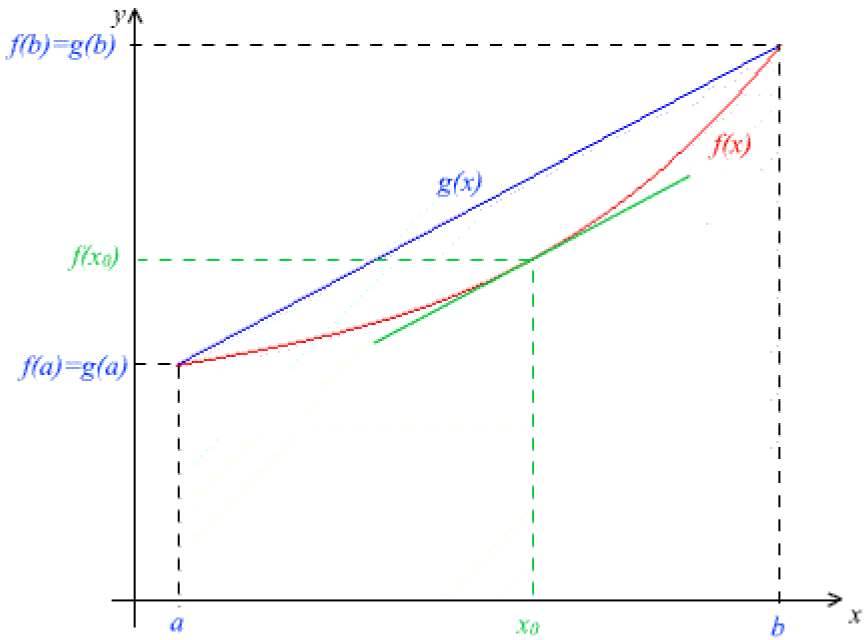
De Stelling van Lagrange.

Formulering:
Als *f* **afleidbaar** is **op het open interval**]a,b[en **continu op het gesloten interval** [a,b]
dan bestaat er minstens 1 getal x_0 tussen a en b waarvoor $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Interpretatie: Onder de gegeven voorwaarden bestaat er dus minstens 1 punt op de grafiek van *f* waarin de **raaklijn evenwijdig is met de koorde door de punten** $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$.

De rico van de rechte door $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ is inderdaad $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Bekijk eens de volgende animatie en de onderstaande figuur. De functie $g(x)$ is de functie waarvan de grafiek de rechte (of koorde) is door de punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$.



Opmerkingen:

- De stelling van Lagrange is duidelijk een veralgemening van de stelling van Rolle (of het gevolg). Vul maar eens $f(a) = f(b)$ in, in de uitdrukking voor $f'(x_0)$ hierboven.
- De opmerkingen die bij de stelling van Rolle gemaakt zijn kan je hier ook formuleren.
  - De functie *f* hoeft niet afleidbaar te zijn in de randpunten a en b.
  - Als 1 van de voorwaarden niet voldaan is dan geldt de conclusie niet noodzakelijk.

Bewijs:
Voor het bewijs moeten we de bovenstaande grafiek omvormen naar een grafiek waarop we de stelling van Rolle kunnen toepassen.
Bekijk eens de volgende animatie.
Wat we dus moeten doen is van de functie *f* de functie *g* (dit is de koorde door de punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$) aftrekken. De resulterende functie $h(x) = f(x) - g(x)$ voldoet dan aan de voorwaarden van de stelling van Rolle.
Inderdaad: $h(a) = f(a) - g(a) = 0,\ h(b) = f(b) - g(b) = 0$. Omdat *f* en *g* continu zijn op [a,b] en afleidbaar zijn op]a,b[is *h* dit ook (Welke regel pas je dan toe?).

Wat is het voorschrift van de functie *g*?
We kunnen dit op meerdere manieren bepalen.

- De vergelijking van de rechte door de 2 punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ is:
  $$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$
  Hieruit volgt:
  $$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(a) - a\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b-a}$$
  Het voorschrift van *g* is dus:
  $$y = g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$
- Een rechte is de grafiek van een lineaire functie dus is $g(x)$ van de vorm:
  $$g(x) = \alpha x + \beta$$
  Eisen dat de 2 punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ tot deze functie behoren leidt tot een stelsel:
  $$\begin{cases} g(a) = \alpha a + \beta = f(a) \\ g(b) = \alpha b + \beta = f(b) \end{cases}$$
  Trek je de 2 vergelijkingen van mekaar af dan bekom je:
  $$\alpha(b-a) = f(b) - f(a) \Leftrightarrow \alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
  Vul deze waarde voor α in, in de eerste vergelijking dan bekom je:
  $$\beta = f(a) - a\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \ldots$$

We concluderen dus wegens de stelling van Rolle dat er een $x_0 \in]a,b[$ bestaat waarvoor $h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) = 0$. Omdat $g'(x) = \alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ volgt hieruit het gestelde.

Stelling van Cauchy

Formulering en bewijs kan je nalezen in de cursus op p86. We beperken ons tot enkele aanvullende opmerkingen.

<u>Opmerkingen:</u>

- Deze stelling is meer van theoretisch nut en wordt hier enkel ingevoerd voor later gebruik in het bewijs van de regel van de l'Hopital
- Je moet de functie *F* niet zelf kunnen construeren. Je moet wel kunnen controleren dat ze voldoet aan de voorwaarden van de stelling van Rolle.
- Waarom volgt uit $g' \neq 0$ in]a,b[dat $g(b) - g(a) \neq 0$?
  Zou $g(b) = g(a)$ dan geldt wegens de stelling van Rolle dat er minstens 1 $x_0 \in]a,b[$ moet bestaan waarvoor $g'(x_0) = 0$ en dit is strijdig met de onderstelling.

Stelling van Taylor

<u>Formulering:</u> Stel dat een functie *f* **minstens m maal afleidbaar** is in een interval *I*. Als a en $b \in I$, dan bestaat er minstens 1 getal $x_0 \in]a,b[$ waarvoor de zogenaamde **formule van Taylor van *f* in a** geldt:

$$\boxed{f(b)= f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a)+\frac{(b-a)^m}{m!}f^{(m)}(x_0)}$$

<u>Interpretatie:</u>
Gegeven 2 punten a en $b \in I$ en $f(a), f'(a), f''(a),..., f^{(m-1)}(a)$ dan geeft het **eerste deel** van de Taylorformule $f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a)$ **een benadering voor de functiewaarde in het andere punt b** ($f(b)$) en men noemt dit een benadering van orde m-1. Het **2^{de} deel** van de formule (de laatste term) zorgt ervoor de de gelijkheid perfect opgaat en noemt men de **restterm of sluitterm** van orde m:
$R_m = \frac{(b-a)^m}{m!}f^{(m)}(x_0)$. Het bijzondere aan deze restterm is dat de **m-de afgeleide van *f*** in een punt ergens tussen a en b, **erin optreedt.**
De Taylorformule bestaat, als *f* voldoende afleidbaar is, voor elk strikt positief geheel getal m. De Taylorformule voor $m=3$ bvb is:

$$f(b)= f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(x_0)$$

<u>Opmerking:</u>
De stelling van Taylor is opnieuw een veralgemening van de stelling van Lagrange. Stellen we inderdaad $m=1$ in de formule van Taylor dan komt er: $f(b)= f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(x_0)$ en dit kan omgevormd worden tot: $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Bekijk nu nog eens de stelling van Lagrange hierboven…

<u>Bewijs:</u>
Het eerste deel van de formule kan je onder de gegeven voorwaarden steeds berekenen en is gelijk aan een bepaald reëel getal. $f(b)$ is ook een reëel getal. We kunnen dus steeds schrijven:

$$f(b)= f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a)+\text{correctieterm}$$

De correctieterm is ook een reëel getal dat ervoor zorgt dat de gelijkheid opgaat, en dit getal kunnen we op zijn beurt ook schrijven als $\frac{(b-a)^m}{m!}A$.
Om de formule van Taylor aan te tonen moeten we dus bewijzen dat A kan geschreven worden als $f^{(m)}(x_0)$ waarbij x_0 een punt is ergens tussen a en b.
We vertrekken dus van de gelijkheid:

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a)+\frac{(b-a)^m}{m!}A$$

of nog:

$$f(a)+\frac{(b-a)}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(b-a)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a)+\frac{(b-a)^m}{m!}A-f(b)=0$$

Als we in het linkerlid van deze gelijkheid overal *a* vervangen door de veranderlijke *x* dan krijgen we het functievoorschrift van een functie:

$$g(x)=f(x)+\frac{(b-x)}{1!}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)+...+\frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x)+\frac{(b-x)^m}{m!}A-f(b)$$

waarvoor dan uiteraard geldt dat $g(a)=0$, in b vinden we ook:

$$g(b)=f(b)+0+0+...+0+0-f(b)=0$$

Dit doet ons denken aan de stelling van Rolle.

Gelden ook de andere voorwaarden van Rolle? M.a.w. is *g* afleidbaar in]a,b[en continu in [a,b]?

Uit het gegeven *f* is minstens m maal afleidbaar in het interval *I* volgt onmiddellijk dat $f, f', f'',..., f^{(m-1)}$ afleidbaar zijn in]a,b[en continu in [a,b] (Hoezo?). De optredende veeltermen zijn uiteraard ook afleidbaar en continu. Door toepassen van de eigenschappen van afleidbaarheid en continuïteit van som en product van functies vinden we dan direct dat *g* afleidbaar is in]a,b[en continu in [a,b].

De stelling van Rolle kan dus toegepast worden. Er bestaat een $x_0 \in \left]a,b\right[$ zodat $g'(x_0)=0$.

Om dit laatste uit te drukken moeten we de afgeleide functie van *g* berekenen. Toepassen van de rekenregels voor afgeleide van een som en afgeleide van een product geeft:

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(x)+\left((b-x)f'(x)\right)'+\frac{1}{2!}\left((b-x)^2f''(x)\right)'+...+\frac{1}{(m-1)!}\left((b-x)^{m-1}f^{(m-1)}(x)\right)'-\frac{A}{m!}m(b-x)^{m-1}-0\\&=f'(x)-f'(x)+(b-x)f''(x)-\frac{1}{2!}2(b-x)f''(x)+\frac{1}{2!}(b-x)^2f'''(x)+...\\&-\frac{1}{(m-1)!}(m-1)(b-x)^{m-2}f^{(m-1)}(x)+\frac{1}{(m-1)!}(b-x)^{m-1}f^{(m)}(x)-\frac{A}{(m-1)!}(b-x)^{m-1}\end{aligned}$$

In deze som vallen nu alle termen 2 aan 2 weg (na vereenvoudiging van de faculteiten) behalve de 2 laatste termen. De afgeleide is dus als we de gemeenschappelijke factoren voorop plaatsen:

$$g'(x)=\frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!}(f^{(m)}(x)-A)$$

Zodat: $g'(x_0)=0 \Leftrightarrow \frac{(b-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}(f^{(m)}(x_0)-A)=0 \Leftrightarrow A=f^{(m)}(x_0)$, wat we moesten aantonen.

(Waarom kan $(b-x_0)^{m-1}$ niet gelijk zijn aan 0?)

Alternatieve vormen van de formule van Taylor.

- Vervangen we b door een willekeurige $x \in I$ dan bekomen we:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a) + \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(x_0)}$$

waarbij x_0 gelegen is tussen a en x.
De functie $f(x)$ wordt dan benadert door de veelterm van graad $m-1$:

$$f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a)$$

En de laatste term is de sluitterm.

- Schrijven we $b = a + h$ dan wordt dit:

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a) + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(a+\theta h)}$$

waarbij we nu $x_0 \in]a, a+h[$ geschreven hebben als $x_0 = a + \theta h$ met $\theta \in]0,1[$.

De formule van Taylor voor een veeltermfunctie.

We beschouwen een voorbeeld: $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ en we stellen de Taylor formule op rond het punt 1, dus $a = 1$.
Wat hebben we hiervoor nodig? We moeten $f(1), f'(1), f''(1), \ldots$ berekenen dus moeten we eerst en vooral de afgeleide functies berekenen en dan de waarde 1 invullen:

$$\begin{array}{ll} f(x) = 2x^2 + 3x + 5 & f(1) = 2 + 3 + 5 = 10 \\ f'(x) = 4x + 3 & f'(1) = 4 + 3 = 7 \\ f''(x) = 4 & f''(1) = 4 \\ f'''(x) = 0 & f'''(1) = 0 \\ \text{enz}\ldots & \text{enz}\ldots \end{array}$$

Wat zie je nu: Vanaf orde 3 vallen alle afgeleiden weg (zijn = 0). Dit betekent dat als we de formule van Taylor van orde $m > 2$ noteren voor deze veeltermfunctie dat alle termen wegvallen vanaf de 3^{de} macht. De formule van Taylor heeft dus geen sluitterm en de gelijkheid gaat exact op. Voor ons voorbeeld wordt dit:

$$f(x) = 10 + \frac{7}{1!}(x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2$$

(Als je de haakjes terug uitwerkt zal je zien dat dit klopt!)

Dit geldt uiteraard algemeen: Als $f(x)$ een veeltermfunctie is van graad n en je stelt de formule van Taylor op voor $m > n$ dan treedt er geen sluitterm op en dan geldt exact:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$