<u>Rekenregels voor afgeleiden</u>

- **Afgeleide van som**(verschil) van 2 functies = **som**(verschil) **van de afgeleiden** van de 2 functies

- Bij het afleiden mag je altijd **een constante factor voorop** plaatsen:

$$\boxed{(Cf(x))' = Cf'(x)}$$

- Afgeleide van het product van 2 functies:

$$\boxed{(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Dus: **afgeleide product = afgeleide 1ste functie x 2de functie + 1ste functie x afgeleide 2de functie.**

- Afgeleide van het quotiënt van 2 functies:

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

Dus: **Afgeleide quotiënt:**
- **Nieuwe noemer = noemer kwadrateren,**
- **Nieuwe teller = noemer overschrijven x afgeleide van de teller – teller overschrijven x afgeleide van de noemer.**

Voorbeelden: zie oefeningen

- Afgeleide van een samengestelde functie: de **Kettingregel**

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)}$$

We moeten dus eerst de buitenste functie afleiden, deze afgeleide evalueren in de binnenste functie en dan vermenigvuldigen met de afgeleide van de binnenste functie.

Voorbeelden: zie oefeningen

  - Extra uitleg bij het bewijs van Stelling 4.2:

    Gebruik de definitie:
    $$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{(g \circ f)(x_0+h) - (g \circ f)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h}$$
    Stel nu: $f(x_0) = y_0$ en $f(x_0+h) - f(x_0) = k(h)$
    Hieruit volgt: $f(x_0+h) = f(x_0) + k(h) = y_0 + k(h)$
    Hiermee wordt de limiet:
    $$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(y_0+k(h)) - g(y_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(y_0+k(h)) - g(y_0)}{k(h)}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
    Waarbij we teller en noemer vermenigvuldigd hebben met $f(x_0+h) - f(x_0) = k(h)$.
    Met de rekenregels voor limieten wordt dit:

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(y_0 + k(h)) - g(y_0)}{k(h)} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(y_0 + k(h)) - g(y_0)}{k(h)} f'(x_0)$$

Omdat *f* continu is in x_0 is: $\lim_{h \to 0} k(h) = \lim_{h \to 0} \left(f(x_0 + h) - f(x_0) \right) = 0$

En dus is wegens samenstellen van limieten:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(y_0 + k(h)) - g(y_0)}{k(h)} = \lim_{k \to 0} \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} = g'(y_0) = g'(f(x_0))$$

Zodat: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$, de afgeleide van $g \circ f$ bestaat dus in x_0.

- Afgeleide van de inverse functie van een (bijectieve) functie
  Als $y_0 = f(x_0)$ en $f'(x_0) \neq 0$ dan is:

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Opmerking: de voorwaarde $f'(x_0) \neq 0$ betekent dat de raaklijn aan *f* in x_0 niet horizontaal is. Herinner U dat de grafiek van de inverse functie kan gevonden worden door de grafiek van de functie te spiegelen t.o.v. de 1ste bissectrice. Een horizontale raaklijn aan *f* geeft dus door spiegeling aanleiding tot een verticale raaklijn aan de inverse functie en in zo'n punt is de inverse niet afleidbaar. Dit is dus een grafisch argument dat de voorwaarde $f'(x_0) \neq 0$ absoluut noodzakelijk is.

- Extra uitleg bij het bewijs van Stelling 4.3

We vertrekken van het gegeven dat *f* afleidbaar is in x_0.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Omdat $f'(x_0) \neq 0$ volgt hieruit door omdraaien:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Stel: $f(x_0) = y_0$ en $f(x_0 + h) - f(x_0) = k(h)$

Hieruit volgt omdat *f* en f^{-1} bijecties zijn: $x_0 = f^{-1}(y_0)$

Uit de 2de vergelijking volgt:

$$f(x_0 + h) = y_0 + k(h) \Leftrightarrow x_0 + h = f^{-1}(y_0 + k(h)) \Leftrightarrow h = f^{-1}(y_0 + k(h)) - f^{-1}(y_0)$$

De limiet wordt dus:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + k(h)) - f^{-1}(y_0)}{k(h)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Omdat *f* continu is in x_0 is: $\lim_{h \to 0} k(h) = \lim_{h \to 0} \left(f(x_0 + h) - f(x_0) \right) = 0$

En dus is wegens samenstellen van limieten het LL van bovenstaande gelijkheid:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + k(h)) - f^{-1}(y_0)}{k(h)} = \lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)}{k} = (f^{-1})'(y_0)$$

De inverse functie is dus afleidbaar in $f(x_0) = y_0$ en $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

- Alternatief bewijs van Stelling 4.3
  We vertrekken van de identiteit: $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$
  Beide leden afleiden geeft (voor het LL gebruiken we de kettingregel):

  $$(f^{-1})'(f(x_0))\,f'(x_0) = 1$$

  en dus(als $f'(x_0) \neq 0$) :

  $$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$