Afgeleide van logaritmische en exponentiele functies.

- Afgeleide van de logaritmische functie

  - Afgeleide van de natuurlijke logaritmische functie $\ln(x)$.
    Bij definitie moeten we de volgende limiet berekenen, voor $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h)-\ln(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(\frac{x_0+h}{x_0})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{\frac{h}{x_0}}\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0}$$

    Want $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{\frac{h}{x_0}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ waarbij we gebruik maken van de speciale limiet (3.61) p 58.

    Conclusie: $\boxed{\ln'(x)=\frac{1}{x}}$

  - Afgeleide van een willekeurige logaritmische functie $\log_a(x)$
    Door het verband tussen $\log_a(x)$ en $\ln(x)$: $\log_a(x)=\frac{1}{\ln(a)}\ln(x)$ af te leiden vinden we:

$$\log_a{}'(x)=\frac{1}{\ln(a)}\ln'(x)=\frac{1}{\ln(a)}\frac{1}{x}$$

- Toepassing: logaritmische afgeleide van een functie

De logaritmische afgeleide van een functie $f(x)$ is de afgeleide van de samengestelde functie $\ln(|f(x)|)$.
Als $f(x)>0$ dan is $|f(x)|=f(x)$ en dus is de logaritmische afgeleide:

$$\left(\ln(|f(x)|)\right)'=\left(\ln(f(x))\right)'=\ln'(f(x))f'(x)=\frac{1}{f(x)}f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Als $f(x)<0$ dan is $|f(x)|=-f(x)$ en dus is de logaritmische afgeleide:

$$\left(\ln(|f(x)|)\right)'=\left(\ln(-f(x))\right)'=\ln'(-f(x))(-f'(x))=\frac{1}{-f(x)}(-f'(x))=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

En dus is de logaritmische afgeleide steeds gelijk aan:

$$\boxed{\left(\ln(|f(x)|)\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Wat is het nut van de logaritmische afgeleide?
De logaritmische afgeleide wordt gebruikt voor het berekenen van de afgeleide van:
- functies met “veel factoren” en met rationale machten in teller en/of noemer
- exponentiële functies waarbij de veranderlijke zowel optreedt in het grondtal als in de exponent, dus functies van de vorm $g(x)^{h(x)}$.

Door toedoen van de rekenregels van de logaritme:

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln(a^b) = b\ln(a)$

wordt $\ln(f(x))$ dan herleidt tot een functie waarvan we de afgeleide makkelijker kunnen berekenen. 2 voorbeelden om dit te illustreren:

<u>Vb1</u>: bepaal de afgeleide functie van $f(x) = \dfrac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$

De ln nemen geeft:

$$\ln(f(x)) = \ln((2x-5)^3) - \ln(x^2) - \ln(\sqrt[4]{x^2+1})$$
$$= 3\ln(2x-5) - 2\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)$$

En dus door afleiden:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3\frac{2}{2x-5} - 2\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)} = \frac{12x(x^2+1) - 4(2x-5)(x^2+1) - x^2(2x-5)}{2x(2x-5)(x^2+1)}$$

of:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x^3+25x^2+4x+20}{2x(2x-5)(x^2+1)}$$

Hieruit volgt dus dat:

$$f'(x) = f(x)\frac{2x^3+25x^2+4x+20}{2x(2x-5)(x^2+1)} = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}\frac{2x^3+25x^2+4x+20}{2x(2x-5)(x^2+1)} = \frac{(2x-5)^2(2x^3+25x^2+4x+20)}{2x^3\sqrt[4]{(x^2+1)^5}}$$

<u>Vb2</u>: bepaal de afgeleide functie van $f(x) = (1+e^x)^{\ln(x)}$

$$\ln(f(x)) = \ln((1+e^x)^{\ln(x)}) = \ln(x)\ln(1+e^x)$$

Dus, gebruik makend voor de rekenregel voor de afgeleide van een product:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x}\ln(1+e^x) + \ln(x)\frac{e^x}{1+e^x}$$

En dus: $f'(x) = (1+e^x)^{\ln(x)}\left(\dfrac{\ln(1+e^x)}{x} + \dfrac{e^x\ln(x)}{1+e^x}\right)$

- Afgeleide van de exponentiele functie.

In de cursus p 70 staat een bewijs voor de afgeleide van een exponentiele functie. Een alternatief bewijs vind je door gebruik te maken van de rekenregel voor de afgeleide van de inverse functie $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

$y_0 = \log_a(x_0) \Leftrightarrow x_0 = \exp_a(y_0)$

Toepassing geeft:

$$\exp_a'(y_0) = \frac{1}{\log_a'(x_0)} = \ln(a)x_0 = \ln(a)\exp_a(y_0)$$

Als speciaal geval vind je dat de afgeleide van de natuurlijke exponentiele functie de functie zelf is.

$$\boxed{\exp'(x) = \exp(x) \Leftrightarrow (e^x)' = e^x}$$