Afgeleide van de goniometrische functies

- Afgeleide van de sinus.

$$\sin'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}$$ als deze limiet bestaat.

Met een van de formules van Simpson (p26) kunnen we de teller hiervan herschrijven:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})\cos(\frac{x_0+h+x_0}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{h}{2})\cos(x_0+\frac{h}{2})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos(x_0+\frac{h}{2}) = 1.\cos(x_0) = \cos(x_0)$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de speciale limiet (3.41): $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ en van de continuïteit van de cosinusfunctie.
De limiet bestaat dus en de sinus is afleidbaar met:

Conclusie: $\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$

- Afgeleide van de cosinus.

We kunnen de afgeleide functie van de cosinus vinden via de definitie zoals bij de sinus. Maar we kunnen ook gebruik maken van de verbanden die bestaan tussen de cosinus en de sinusfuncties. 2 formules zijn hiervoor bruikbaar nl. $\cos(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ welke in de cursus gebruikt wordt en $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$. De afleiding gebruik makend van deze laatste formule gaat als volgt:

$$\cos'(x) = \frac{d}{dx}\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(\frac{\pi}{2}-x)\frac{d}{dx}(\frac{\pi}{2}-x) = -\cos(\frac{\pi}{2}-x) = -\sin(x)$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de kettingregel.

Conclusie: $\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$

- Afgeleide van tg en cotg

In de cursus word de afgeleide van tg berekent: $\boxed{tg'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}$

De afgeleide van cotg is:

$$cotg'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{\sin(x)\cos'(x)-\cos(x)\sin'(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$