Elasticiteit van een functie.

- Definitie van elasticiteit van een functie *f* in een punt x_0

  - We laten de *x*-waarden toenemen van x_0 naar x_0+h, het argument krijgt hierdoor een absolute toename: $(x_0+h)-x_0=h$
    de corresponderende **relatieve toename van** x_0 is dan: $\frac{h}{x_0}$

  - De functiewaarden wijzigen hierdoor van $f(x_0)$ naar $f(x_0+h)$, dit geeft een absolute toename: $f(x_0+h)-f(x_0)$
    en een corresponderende **relatieve toename van *f* in** x_0**:** $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)}$

  - Het quotiënt van de 2 noemen we de **boogelasticiteit van *f* in** x_0**:**

$$boogelasticiteit=\frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{h}{x_0}}$$

  - De **elasticiteit van de functie *f* in** x_0 is dan de limiet hiervan voor $h\to 0$:

$$\frac{Ef}{Ex}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{h}{x_0}}=\frac{x_0}{f(x_0)}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=x_0\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

    Op voorwaarde uiteraard dat deze limiet bestaat. Dit is het geval als de functie *f* afleidbaar is in x_0.

- Elastisch/inelastisch
  - Als de **relatieve wijziging van de functiewaarden** in x_0 **groter** is **dan de relatieve toename van** x_0 (in de limiet voor $h\to 0$) dan is de functie **<u>elastisch in</u>** x_0.
    De voorwaarde hiervoor is dus: $\boxed{\left|\frac{Ef}{Ex}(x_0)\right|>1 \Leftrightarrow \frac{Ef}{Ex}(x_0)>1 \text{ of } \frac{Ef}{Ex}(x_0)<-1}$

  - Als daarentegen de **relatieve wijziging van de functiewaarden** in x_0 **kleiner** is **dan de relatieve toename van** x_0 (in de limiet voor $h\to 0$) dan is de functie **<u>inelastisch in</u>** x_0.
    De voorwaarde hiervoor is dus: $\boxed{\left|\frac{Ef}{Ex}(x_0)\right|<1 \Leftrightarrow -1<\frac{Ef}{Ex}(x_0)<1}$

- ○ Zijn de **relatieve wijziging van de functiewaarden** in x_0 en de **relatieve toename van** x_0 (in de limiet voor $h \to 0$) **gelijk aan mekaar** dan heeft de functie **elasticiteit +1 of –1**: $\boxed{\left|\frac{Ef}{Ex}(x_0)\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{Ef}{Ex}(x_0) = 1 \text{ of } \frac{Ef}{Ex}(x_0) = -1}$

- De elasticiteitsfunctie van een functie f is de functie $\frac{Ef}{Ex}$ die gegeven is door:

$$\boxed{\frac{Ef}{Ex}(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} = x(\ln(f(x))'}$$

Vb. $f(x) = e^x$

Omdat $f'(x) = (e^x)' = e^x$ is de elasticiteitsfunctie gelijk aan:

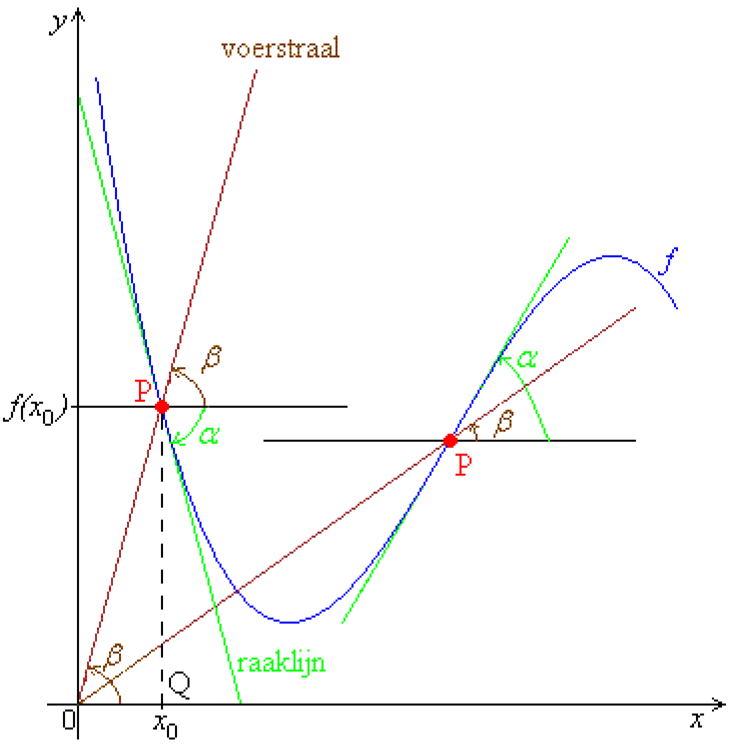
$$\frac{Ef}{Ex}(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} = x\frac{e^x}{e^x} = x\,.$$

De elasticiteit van f in $x_0 = 1$ is dan $\frac{Ef}{Ex}(1) = 1$.

Bemerking: We berekenen de elasticiteit in een punt, analoog als de afgeleide, door eerst de elasticiteitsfunctie te berekenen en dan het punt in te vullen in het bekomen functievoorschrift.

- Meetkundige betekenis van de elasticiteit van een functie in een punt.

Beschouw de grafiek van de functie. Het punt $\left(x_0, f(x_0)\right)$ op de grafiek noteren we als P.



Door het punt P kan je 3 rechten beschouwen:
- ○ De raaklijn in P aan de grafiek van de functie (groen).
- ○ De voerstraal, dit is de rechte OP die de oorsprong met P verbindt (bruin).
- ○ Een rechte evenwijdig met de *x*-as.

Herschrijf de uitdrukking: $\dfrac{Ef}{Ex}(x_0) = x_0\,\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \dfrac{f'(x_0)}{\dfrac{f(x_0)}{x_0}}$

Uit de grafiek volgt dan:

- $f'(x_0)$ = de rico van de raaklijn aan *f* in x_0**.** (zie meetkundige betekenis afgeleide)
  = $tg(\alpha)$

  waarbij α de hoek is (tussen $-\dfrac{\pi}{2}$ en $\dfrac{\pi}{2}$) die de raaklijn maakt met de *x*-as (= de as van de onafhankelijke veranderlijke).

- In de rechthoekige driehoek OPQ geldt:
  $\dfrac{f(x_0)}{x_0} = tg(\beta)$ = de rico van de voerstraal door P.

  waarbij β de hoek is (tussen $-\dfrac{\pi}{2}$ en $\dfrac{\pi}{2}$) die de voerstraal maakt met de *x*-as (= de as van de onafhankelijke veranderlijke).

De **meetkundige betekenis van de elasticiteit** van een functie *f* in een punt x_0 is dus:

$$\frac{Ef}{Ex}(x_0) = \frac{tg(\alpha)}{tg(\beta)} = \frac{\text{rico raaklijn}}{\text{rico voerstraal}}$$

α = hoek die de **raaklijn** maakt met de as van de onafhankelijke veranderlijke *x*
β = hoek die de **voerstraal** maakt met de as van de onafhankelijke veranderlijke *x*

- Interpretatie en eigenschappen van de elasticiteit afgeleid uit deze meetkundige interpretatie.

  In de economie werkt men meestal enkel met positieve grootheden vandaar dat we vanaf nu onderstellen dat: $x_0 > 0$ en $f(x_0) > 0$ en dus ook $tg(\beta) > 0$.

  - Verband stijgen/dalen van de functie en de elasticiteit van de functie
    - Als de functie stijgt dan is $f'(x_0) \geq 0$ en dus zal ook $\dfrac{Ef}{Ex}(x_0) \geq 0$.

      via de meetkundige betekenis: als *f* stijgt is $\alpha \geq 0$ (of exacter ligt α in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$) en dus ook $tg(\alpha) \geq 0$ zodat $\dfrac{Ef}{Ex}(x_0) = \dfrac{tg(\alpha)}{tg(\beta)} \geq 0$.
      Dit is het geval in het rechtse punt op de bovenstaande grafiek.

      conclusie: **een stijgende functie heeft een positieve elasticiteit**.

    - Als de functie daalt dan is $f'(x_0) \leq 0$ en dus zal ook $\dfrac{Ef}{Ex}(x_0) \leq 0$.

      analoog via de meetkundige betekenis: als *f* daalt is $\alpha \leq 0$ (of α ligt in $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$) en $tg(\alpha) \leq 0$ zodat $\dfrac{Ef}{Ex}(x_0) = \dfrac{tg(\alpha)}{tg(\beta)} \leq 0$.
      Dit is het geval in het linkse punt op de bovenstaande grafiek.

conclusie: **een dalende functie heeft een negatieve elasticiteit**.

- Grafisch kenmerk elastisch/inelastisch

  - Onderstel eerst een stijgende functie:

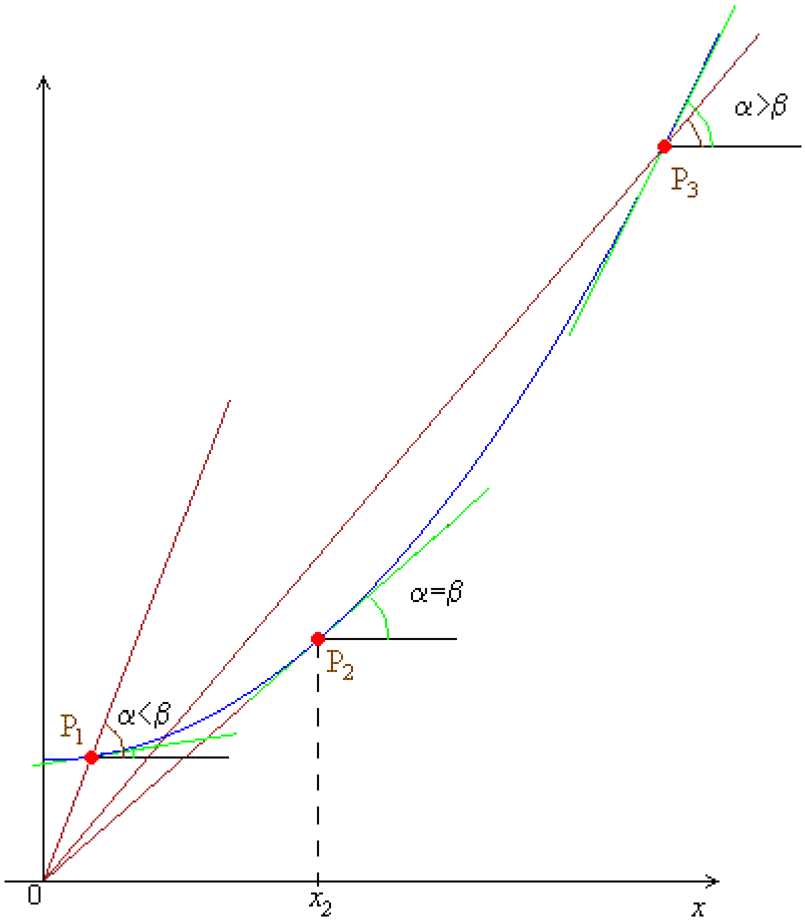
    Hiervoor is $\alpha > 0$, $tg(\alpha) > 0$ en $\frac{Ef}{Ex}(x_0) = \frac{tg(\alpha)}{tg(\beta)} > 0$.

    De functie is **elastisch** in een punt als $\frac{Ef}{Ex}(x_0) > 1 \Leftrightarrow tg(\alpha) > tg(\beta)$ dus als $\boxed{\alpha > \beta}$.
    Grafisch betekent dit dat de **raaklijn** in het punt **steiler** is **dan** de **voerstraal**.

    De functie heeft **elasticiteit =1** als $\boxed{\alpha = \beta}$ m.a.w. als de **raaklijn** en de **voerstraal samenvallen** of nog als de **raaklijn door de oorsprong** gaat.

    Analoog is de functie **inelastisch** in een punt als $\boxed{\alpha < \beta}$, de **voerstraal is steiler dan de raaklijn** in het punt.

    Dit wordt geïllustreerd in onderstaande grafiek: In P_1 is de functie inelastisch, in P_2 is de elasticiteit = 1 en in P_3 is de functie elastisch. De functie is aldus inelastisch voor $0 \le x \le x_2$, elastisch voor $x > x_2$. $x = x_2$ is de overgangswaarde van inelastisch naar elastisch .



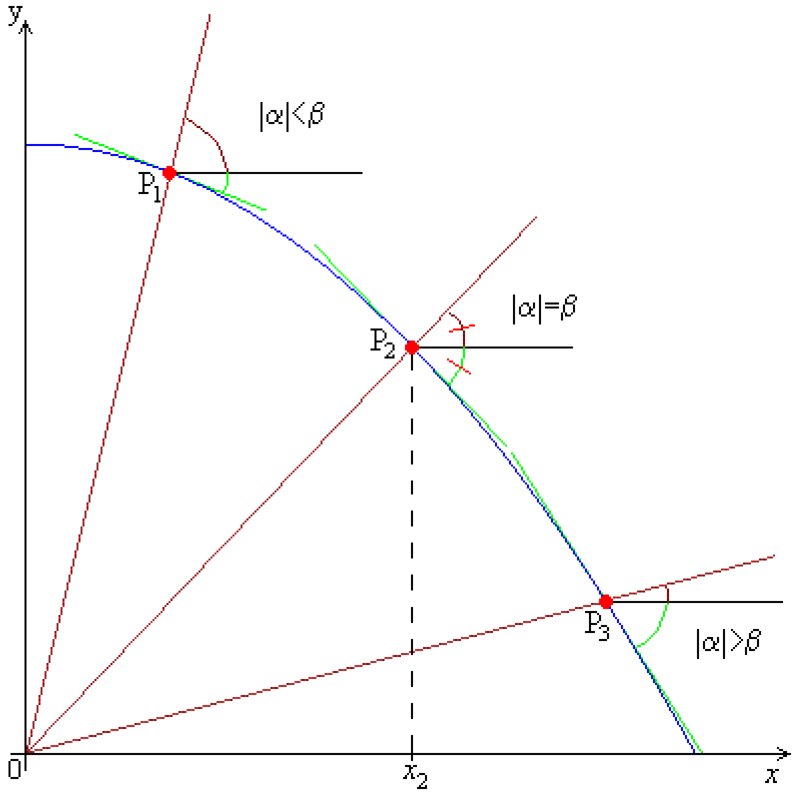
- Als de functie dalend is $\alpha < 0$, $tg(\alpha) < 0$ en $\frac{Ef}{Ex}(x_0) = \frac{tg(\alpha)}{tg(\beta)} < 0$.

  De functie is **elastisch** in een punt als:
  $\frac{Ef}{Ex}(x_0) < -1 \Leftrightarrow \frac{tg(\alpha)}{tg(\beta)} < -1 \Leftrightarrow -tg(\alpha) > tg(\beta) \Leftrightarrow tg(-\alpha) > tg(\beta)$
  of nog, omdat $|\alpha| = -\alpha$, als $\boxed{|\alpha| > \beta}$. Grafisch betekent dit dat de **raaklijn** in het punt **steiler** is **dan** de **voerstraal,** ttz de **raaklijn daalt sneller dan de voerstraal stijgt**.

  De functie heeft **elasticiteit = -1** als $\boxed{\beta = -\alpha}$ m.a.w. als de **raaklijn** en de **voerstraal dezelfde** (maar tegengestelde) **hoek maken met de *x*-as**.

  Analoog is de functie **inelastisch** in een punt als $\boxed{|\alpha| < \beta}$, de **voerstraal stijgt sneller dan de raaklijn daalt**.

  In onderstaande grafiek is de functie inelastisch in P_1, is de elasticiteit = -1 in P_2 en in P_3 is de functie elastisch. De functie is aldus inelastisch voor $0 \leq x \leq x_2$, elastisch voor $x > x_2$. $x = x_2$ is de overgangswaarde van inelastisch naar elastisch .



  Opmerking: Voor een stijgende functie is het grafisch eenvoudig om de punten te bepalen waar de elasticiteit = 1. Je hoeft enkel vanuit de oorsprong de raaklijn(en) te construeren aan de grafiek en de corresponderende *x*-waarden af te lezen. Voor een dalende functie is het echter niet zo evident om met blote oog het punt te vinden waar de hoeken van de raaklijn en de voerstraal met de *x*-as tegengesteld zijn.

- Tweede meetkundige betekenis van elasticiteit van een functie in een punt

  Deze 2^de^ grafische interpretatie wordt enkel gebruikt voor een **dalende functie** gelegen in het eerste kwadrant. (dus $x_0 > 0$ en $f(x_0) > 0$).

  Voor de afleiding van de regel verwijzen we naar de cursus p. 75.
  Op de grafiek is:
  - $|PQ_1| =$ de afstand langs de raaklijn in P vanaf P tot aan de *x*-as (= de as van de onafhankelijke veranderlijke)
  - $|PQ_2| =$ de afstand langs de raaklijn in P vanaf P tot aan de *y*-as (= de as van de afhankelijke veranderlijke)

  De 2^de^ meetkundige interpretatie van elasticiteit is dus:

$$\boxed{\frac{Ef}{Ex}(x_0) = -\frac{\text{afstand langs de raaklijn tot de (afhankelijke) y-as}}{\text{afstand langs de raaklijn tot de (onafhankelijke) x-as}}}$$

- <u>Belangrijke opmerking i.v.m. de meetkundige interpretaties van de elasticiteit:</u>

  In de economie gaat men dikwijls de elasticiteit van de vraag en van het aanbod berekenen. De vraag $D(p)$ en het aanbod $S(p)$ zijn beide functies van de prijs p zodat we de elasticiteit berekenen in functie van de prijs en daarom spreekt men van **prijselasticiteit** van vraag en aanbod.
  Deze zijn gegeven door: $\frac{ED}{Ep}(p) = p\frac{D'(p)}{D(p)}$ en $\frac{ES}{Ep}(p) = p\frac{S'(p)}{S(p)}$
  De meetkundige interpretatie blijft ook gelden:
$$\frac{ED}{Ep}(p) = \frac{tg(\alpha)}{tg(\beta)}$$
  en analoog voor het aanbod.
  Maar omdat in de economie de p-as verticaal geplaatst wordt zijn de **hoeken** α en β de hoeken **ingesloten** door de **raaklijn** respectievelijk **voerstraal met de <u>verticale as</u>**!!

  Een analoge opmerking geldt voor de 2^de^ meetkundige interpretatie: de p-as is de as van de onafhankelijke veranderlijke, de q-as de as van de afhankelijk veranderlijke zodat de uitdrukking nu wordt:
$$\frac{ED}{Ep}(p) = -\frac{\text{afstand langs de raaklijn tot de q-as}}{\text{afstand langs de raaklijn tot de p-as}}$$

  Let er dus steeds goed **op wat de onafhankelijk veranderlijke** is als je de elasticiteit meetkundig wilt afleiden.

- Uitgewerkt voorbeeld: De vraagfunctie $q = D(p) = -2p^2 + 20 = 2(10 - p^2)$

  We beschouwen enkel het economische relevante deel van deze functie. Voorwaarden hiervoor zijn: $p \geq 0$ en $q \geq 0$. Deze laatste herleidt zich tot $10 - p^2 \geq 0$ of dus $0 \leq p \leq \sqrt{10}$ rekening houdend met de 1^ste^ voorwaarde. Het economisch relevante definitiegebied is dus $\left[0, \sqrt{10}\right]$.

Door de definitie te gebruiken vinden we voor de elasticiteit:

$$\frac{ED}{Ep}(p) = p\,\frac{-4p}{2(10-p^2)} = \frac{-2p^2}{10-p^2}$$

Omdat een vraagfunctie dalend is, is de <u>elasticiteit negatief</u>, wat we trouwens ook onmiddellijk aan de gevonden uitdrukking merken.

- De vraagfunctie is elastisch als $\frac{ED}{Ep}(p) < -1$. Uitwerking hiervan geeft:

  $$\frac{ED}{Ep}(p) = \frac{-2p^2}{10-p^2} < -1 \Leftrightarrow -2p^2 < -(10-p^2) \Leftrightarrow 3p^2 > 10 \Rightarrow p > \sqrt{\frac{10}{3}}$$

- De vraagfunctie is inelastisch als $\frac{ED}{Ep}(p) > -1$. Op analoge manier bekomen we hieruit: $p < \sqrt{\frac{10}{3}}$.
- In $p = \sqrt{\frac{10}{3}}$ is de elasticiteit gelijk aan –1.