Afgeleide van de cyclometrische functies

De cyclometrische functies zijn de inverse functies van de (beperkte) goniometrische functies. Om de afgeleiden ervan te bepalen kunnen we dus gebruik maken van de rekenregel voor de afgeleide van de inverse functie $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ (op voorwaarde dat $f'(x_0) \neq 0$).

- Afgeleide van de bgsin

  bgsin is de inverse van de sinusfunctie beperkt tot het interval $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ en er geldt: $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$.

  De punten in het interval $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ waarvoor $\cos(x_0) = 0$ zijn $-\dfrac{\pi}{2}$ en $\dfrac{\pi}{2}$. Deze waarden moeten we dus uitsluiten. Omdat $\sin(-\dfrac{\pi}{2}) = -1$ en $\sin(\dfrac{\pi}{2}) = 1$ moeten we –1 en 1 uitsluiten in het definitiegebied van bgsin en bekomen we dus dat bgsin afleidbaar is in $\left]-1,1\right[$ met ($y_0 = bg\sin x_0 \Leftrightarrow x_0 = \sin(y_0)$):

  $$bg\sin'(y_0) = \frac{1}{\sin'(x_0)} = \frac{1}{\cos(x_0)}$$

  Omdat $\cos(x_0) > 0$ in $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ volgt uit $\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0) = 1$ dat

  $\cos(x_0) = \sqrt{1 - \sin^2(x_0)} = \sqrt{1 - y_0{}^2}$ zodat:

  $$bg\sin'(y_0) = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0{}^2}}$$

  Conclusie: bgsin is afleidbaar in $\left]-1,1\right[$ met $\boxed{bg\sin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$

- Afgeleide van de bgcos

  De afleiding verloopt analoog als voor bgsin:
  bgcos is de inverse van cos beperkt tot $\left[0, \pi\right]$ en: $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$.

  $-\sin(x_0) = 0$ in 0 en π (in $\left[0, \pi\right]$). Deze waarden moeten we dus uitsluiten.

  $\cos(0) = 1$ en $\cos(\pi) = -1$, dus –1 en 1 uitsluiten in het definitiegebied van bgcos.

  Dus: bgcos is afleidbaar in $\left]-1,1\right[$ met:

  $$bg\cos'(y_0) = \frac{1}{\cos'(x_0)} = -\frac{1}{\sin(x_0)}$$

  Omdat $\sin(x_0) > 0$ in $\left]0, \pi\right[$ is dit ook gelijk aan:

$bg\cos'(y_0) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-{y_0}^2}}$

Conclusie: bgcos is afleidbaar in $]-1,1[$ met $\boxed{bg\cos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

- Afgeleide van de bgtg

  Op volledig analoge manier (zie p 69) vind je voor de afgeleide van bgtg (waarbij je gebruik maakt van de goniometrische formule $1+tg^2(x_0) = \dfrac{1}{\cos^2(x_0)}$)

  bgtg is afleidbaar in R met $\boxed{bgtg'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$