Stelling 3.8: De Stelling van Weierstrass

Intuïtieve formulering: De grafiek van een functie die continu is in een gesloten interval is zowel naar boven als naar onder begrensd en ze heeft een kleinste functiewaarde, (die bereikt wordt in x_m) en een grootste functiewaarde (die bereikt wordt x_M).

Er moeten dus 2 voorwaarden vervuld zijn opdat de stelling zou gelden.
1^e : continu:
2^e : op een gesloten interval

Als 1 van deze niet vervuld is, geldt de stelling niet. Dit wordt geïllustreerd op de figuur 3.9. In de 1ste grafiek zijn de voorwaarden vervult en geldt de stelling wel, in de 2de grafiek is de functie niet gedefinieerd in een punt tussen a en b en dus niet continu op het gesloten interval. In de laatste grafiek treedt er een sprong op in functiewaarde tussen a en b en is de continuïteitseis opnieuw niet voldaan. Voor de 2 laatste grafieken geldt de stelling dus niet.

Stelling 3.9: Stelling van Bolzano

Intuïtieve formulering: De grafiek van een functie die continu is op een gesloten interval kan niet van een punt onder de x-as naar een punt boven de x-as gaan (of omgekeerd) zonder de x-as te snijden.
De voorwaarde $f(a)f(b) < 0$ wil inderdaad zeggen dat de ene functiewaarde negatief is en de andere positief. Een nulpunt van een functie komt inderdaad overeen met een snijpunt met de *x*-as.

De volgende voorwaarden moeten dus vervuld zijn opdat de stelling zou gelden:
1^e : continu op het gesloten interval $[a,b]$
2^e: $f(a)$ en $f(b)$ moeten een verschillend teken hebben.

Als 1 van de voorwaarden niet vervult is geldt de stelling niet. De 1ste grafiek van figuur 3.10 p 55 voldoet aan de stelling van Bolzano, de 2de niet want de functie is niet continu in het interval.

Gevolg 3.10: Stelling van de tussenliggende waarde.

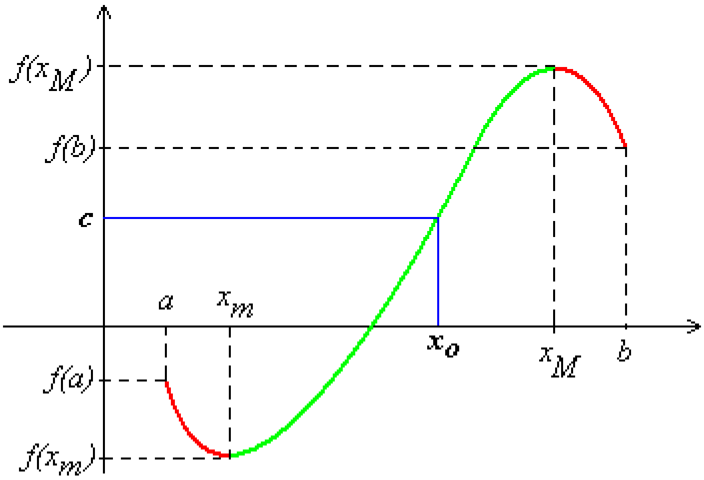
Intuïtieve formulering: De grafiek van een functie die continu is kan niet van een punt met functiewaarde kleiner dan een bepaalde waarde *c* naar een punt met functiewaarde groter dan diezelfde waarde *c* (of omgekeerd) zonder de horizontale rechte $y = c$ te snijden.

Dit is duidelijk een onmiddellijk gevolg (of veralgemening) van de stelling van Bolzano. I.p.v. onder of boven de *x*-as ($y = 0$) liggen de punten nu onder of boven de horizontale $y = c$. Conclusie bij Bolzano is dat er minstens 1 snijpunt is met de x-as, hier dat er minstens 1 snijpunt is met de rechte $y = c$, d.w.z. er bestaat minstens 1 punt $x_0 \in]a,b[: f(x_0) = c$.

Om de stelling van de tussenliggende waarde te bewijzen wordt de hulpfunctie $g(x) = f(x) - c$ ingevoerd. De grafiek van deze functie vind je door de grafiek van *f* over de afstand *c* naar beneden te verschuiven. Hierdoor wordt ook de rechte $y = c$ verschoven tot op de *x*-as en voldoet *g* aan de stelling van Bolzano.

Gevolg 3.11: Stelling Weierstrass + tussenliggende waarde.

Het volgende grafiekje illustreert gevolg 3.11.



Het bewijs kan je vinden door de stelling van de tussenliggende waarde toe te passen op het interval $[x_m, x_M]$, (het groene deel van de grafiek).