Extra uitleg bij stelling 3.7: samenstellen van continue functies

Formulering: De samengestelde functie van 2 continue functies is ook continu.

Bewijs: Gebruik makend van de definitie van continuïteit drukken we de gegevens uit:

g is continu in $y_0 = f(x_0)$ a.s.a. $\forall \varepsilon > 0 : \exists \gamma > 0 : |y - y_0| < \gamma \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ (1)

f is continu in x_0 a.s.a. $\forall \gamma > 0 : \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \gamma$ (2)

Te bewijzen is:

gof is continu in x_0 d.w.z. : $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |gof(x) - gof(x_0)| < \varepsilon$

Welnu: Voor elke ε bestaat er wegens (1) een γ zodat de implicatie uit (1) geldt. Bij deze waarde van γ bestaat er volgens (2) een δ zodat de implicatie uit (2) geldt. Voor elke ε bestaat er dus een δ zodat geldt dat $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \gamma$. Omdat $y = f(x)$ en $y_0 = f(x_0)$ volgt hier wegens (1) ook uit dat $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ en dus $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ en dit is wat we moesten bewijzen want $gof(x) = g(f(x))$.