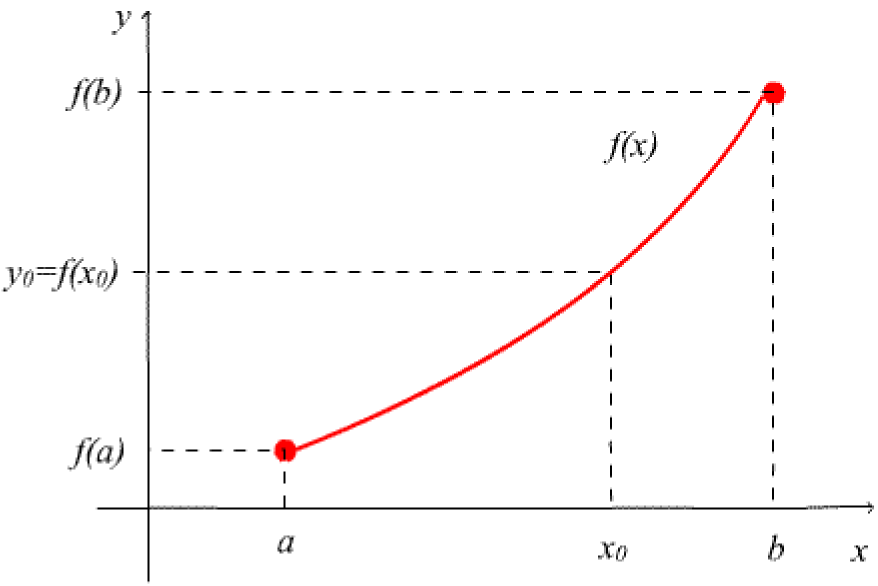
<u>Extra uitleg bij stelling 3.12: Stelling i.v.m. strikt monotone functies.</u>

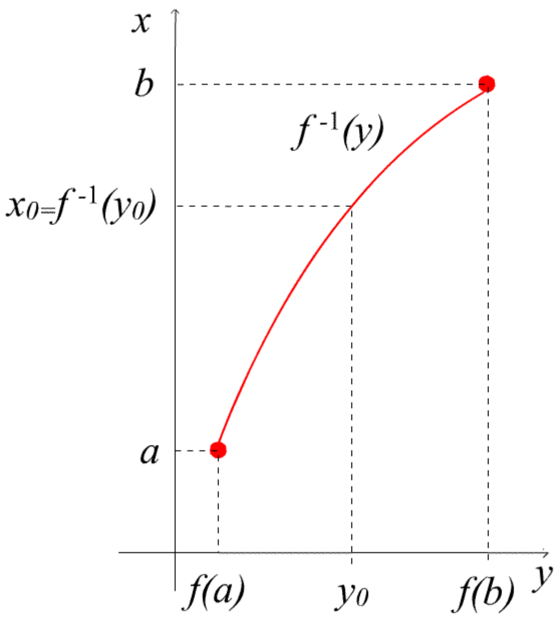
Formulering (voor stijgend, voor dalend analoog):
Als een functie continu is en strikt monotoon stijgend op een gesloten interval $[a,b]$ dan is de inverse relatie ook een functie die ook strikt monotoon stijgend is en continu op het gesloten interval $[f(a), f(b)]$.

Er dienen dus de volgende voorwaarden voldaan te zijn opdat de stelling zou gelden:
- continu op een gesloten interval:
- strikt stijgend
- monotoon stijgend op het interval

Illustrerende grafiek: Zo'n functie kan er bvb uitzien als volgt:



Zoals gezien in Hoofdstuk 2 bekom je de grafiek van de inverse door de grafiek van f te spiegelen t.o.v de eerste bissectrice. Deze ziet dus als volgt uit: (Merk op dat de assen ook gespiegeld zijn, en de *y*-as nu de onafhankelijke as is).



Bewijs: Het bewijs splitst zich op in 3 delen:

1e : bewijzen dat de inverse een functie is. Hiervoor moet je aantonen dat er voor elke $y_0 \in [f(a), f(b)]$ er ten hoogste 1 $x_0 \in [a,b]$ bestaat zodat $y_0 = f(x_0)$.
Uit de stelling van de tussenliggende waarde (gevolg 3.10) volgt dat er minstens 1 zo'n x_0 bestaat. Om aan te tonen dat er ten hoogste 1 bestaat maken we de volgende redenering uit het ongerijmde. Onderstel dat er wel 2 verschillende waarden zijn x_1 en x_2 zodat $y_0 = f(x_1) = f(x_2)$ en noem x_1 de kleinste hiervan dus $x_1 < x_2$. Omdat *f* strikt stijgend is volgt uit deze laatste ongelijkheid $f(x_1) < f(x_2)$ en dit is uiteraard in strijd met onze onderstelling $y_0 = f(x_1) = f(x_2)$.

Opmerking: Als *f* stijgend is (niet strikt stijgend), dan volgt uit $x_1 < x_2$, $f(x_1) \le f(x_2)$ en dit is niet strijdig met de onderstelling. Dus de stelling geldt niet als *f* gewoon stijgend is.

2e: Je moet aantonen dat uit $y_1 < y_2$ volgt dat $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$.
We redeneren weer uit het ongerijmde. Onderstel dat $x_1 \ge x_2$ dan volgt hieruit, wegens het strikt stijgend zijn van *f* dat $f(x_1) \ge f(x_2)$ m.a.w. $y_1 \ge y_2$ en dit is in strijd met $y_1 < y_2$.

3e: We moeten aantonen dat f^{-1} continu is in $[f(a), f(b)]$. Hiervoor moeten we aantonen dat f^{-1} continu is in elk punt y_0 van $]f(a), f(b)[$ (en rechtscontinu in $f(a)$ en linkscontinu in $f(b)$ maar dit laten we achterwege). Door de definitie van continuïteit toe te passen op f^{-1} wordt het te bewijzen ($y_0 = f(x_0), x_0 = f^{-1}(y_0)$):

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[\Rightarrow f^{-1}(y) \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f^{-1}(]y_0 - \delta, y_0 + \delta[) \subseteq]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

Voor een gegeven ε geldt (bekijk ook de onderstaande figuur):

Omdat *f* strikt stijgend is volgt uit $x_0 - \varepsilon < x_0$ dat $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0$ en dus kan je schrijven: $f(x_0 - \varepsilon) = y_0 - \delta_1$. Analoog kan je ook stellen: $f(x_0 + \varepsilon) = y_0 + \delta_2$.

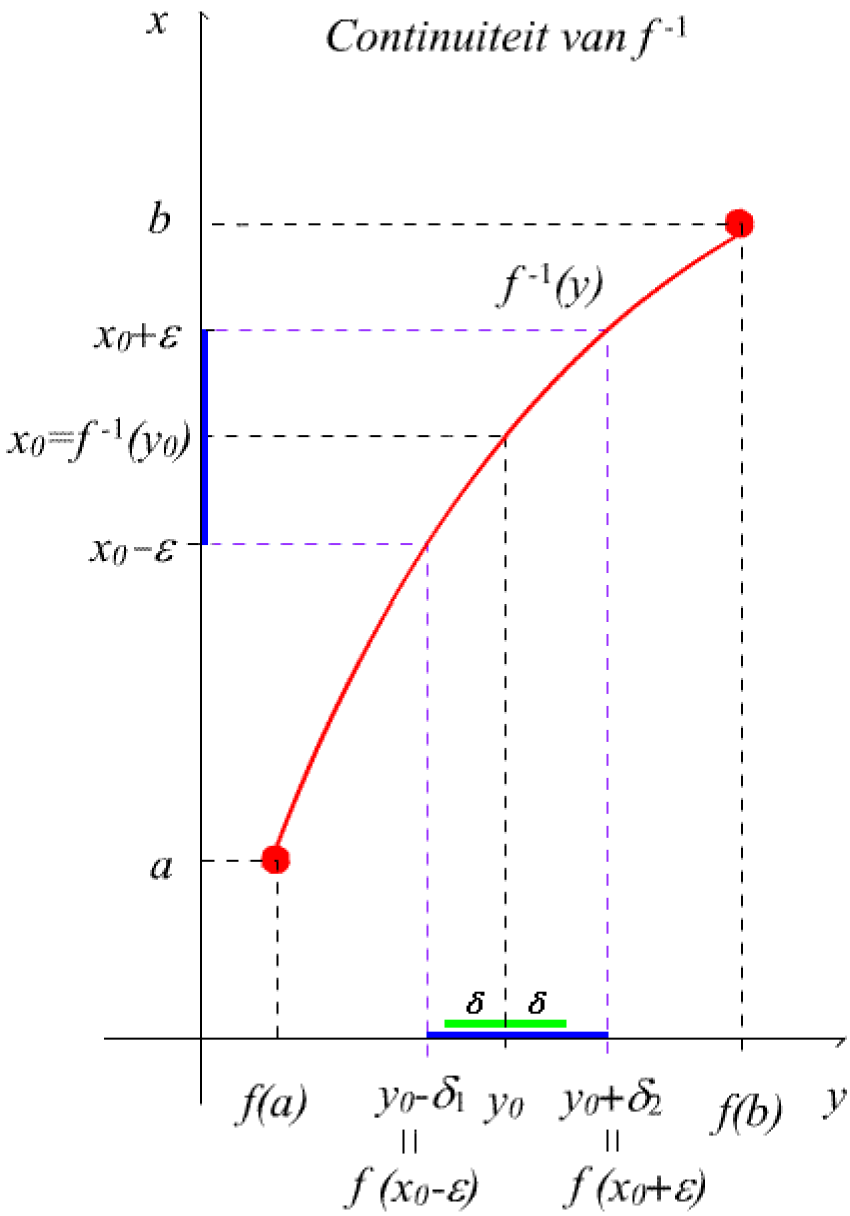
Op de figuur is onmiddellijk af te lezen dat $f([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]) = [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2]$. Een figuur is echter geen bewijs dus trachten we dit nu aan te tonen. We doen dit in 2 stappen:
1e stap: $f([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]) \subseteq [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2]$

bewijs: Als $x_0 - \varepsilon \le x \le x_0 + \varepsilon$ dan volgt hieruit wegens het strikt stijgend zijn van *f* dat : $f(x_0 - \varepsilon) \le f(x) \le f(x_0 + \varepsilon)$ dus $y_0 - \delta_1 \le f(x) \le y_0 + \delta_2$

2e stap: $[y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2] \subseteq f([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])$

bewijs: Zij $y_0 - \delta_1 < y < y_0 + \delta_2$, omdat *f* continu is op $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ volgt hieruit wegens de stelling van de tussenliggende waarde (of gevolg 3.11) dat er een punt

$x \in \left]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[$ bestaat zodat $f(x) = y$. Omdat $f(x_0 - \varepsilon) = y_0 - \delta_1$ en $f(x_0 + \varepsilon) = y_0 + \delta_2$ is het gestelde bewezen.



Omdat f bijectief is volgt uit $f([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]) = [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2]$ onmiddellijk dat $f^{-1}([y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2]) = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

Kies nu $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2)$ dan is $\left]y_0 - \delta, y_0 + \delta\right[\subset [y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2]$ en dus is:
$f^{-1}(\left]y_0 - \delta, y_0 + \delta\right[) \subset f^{-1}([y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2]) = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$
Omdat $x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0 - \delta_1)$ en $x_0 + \varepsilon = f^{-1}(y_0 + \delta_2)$ en f^{-1} injectief is (elke functiewaarde kan maar 1 keer optreden) volgt hieruit het te bewijzen:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : f^{-1}(\left]y_0 - \delta, y_0 + \delta\right[) \subseteq \left]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[$$