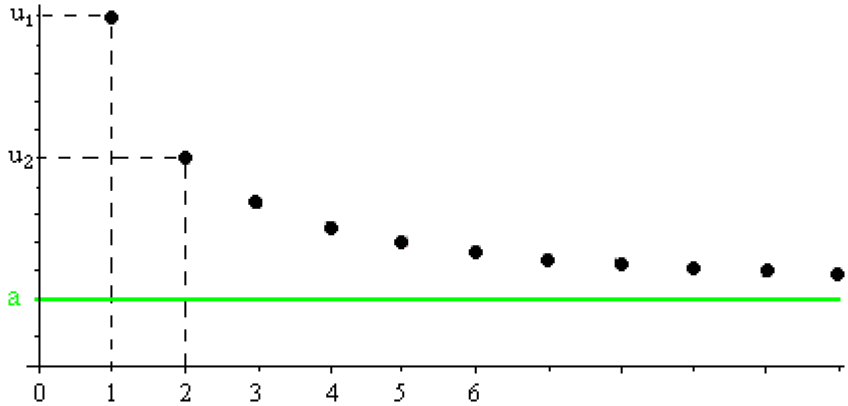
Limiet van een rij

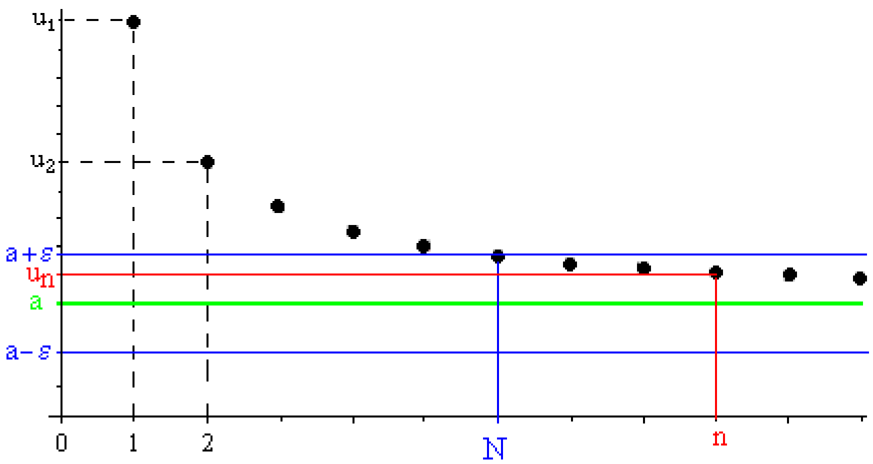
Definitie:
Een rij is een functie van **N*** ={1,2,3,4,...} naar **R**. De grafische voorstelling van een rij bestaat dus uit de verzameling van punten (of bolletjes) met coördinaten $(n, u_n), n = 1,2,3,4,....$ zoals bvb op onderstaande grafiek.



Op deze grafiek heb je duidelijk de indruk dat de bolletjes, hoe verder naar rechts, steeds dichter bij de groene lijn komen te liggen, met andere woorden de waarden u_n naderen naar de waarde a als n nadert naar $+\infty$.
We zeggen in de wiskunde dat **de rij *u* convergeert naar a**, of nog : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = a}$.

Hoe kunnen we nu convergentie van een rij naar a wiskundig definiëren?

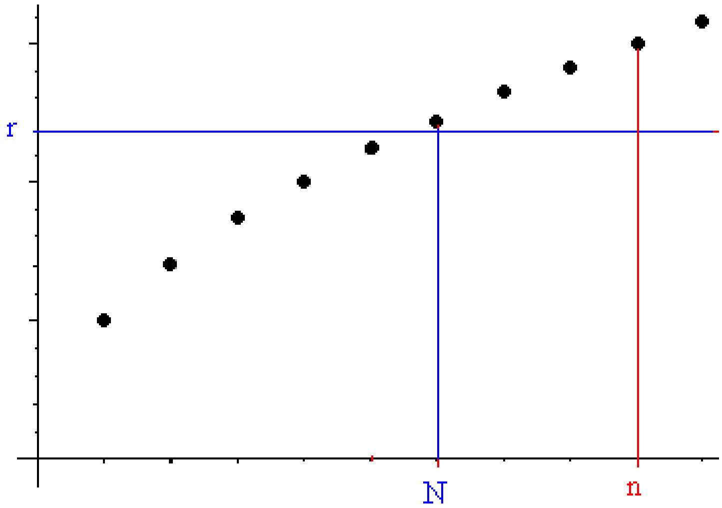
Teken een horizontale strook $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, symmetrisch t.o.v van a.



In feite komt convergentie dan hierop neer: Hoe dicht we ook bij a zitten, dus hoe smal die horizontale strook ook is, vanaf een bepaalde waarde moeten alle bolletjes van de rij binnen de strook komen te liggen. Of nog: hoe klein ε ook is vanaf een bepaalde waarde N moeten alle punten rechts van N binnen de strook liggen of dus als $n > N$ moet $a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$. Dit laatste kan je nog herschrijven als:
$-\varepsilon < u_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow |u_n - a| < \varepsilon$.
De wiskundige definitie van **convergentie van een rij u naar een reëel getal a** is dus:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathrm{N} : n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon}$$

Bekijk nu de volgende grafiek:



Nu heb je de indruk dat de punten steeds blijven stijgen als je naar rechts gaat. Met andere woorden de waarden u_n naderen naar de waarde $+\infty$ als n nadert naar $+\infty$.

We zeggen dat **de rij u divergeert naar** $+\infty$ of $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

Hoe definiëren we divergentie naar $+\infty$?

Teken een horizontale rechte $y = r$. In feite komt divergentie naar $+\infty$ dan hierop neer: hoe hoog deze rechte ook ligt, vanaf een bepaalde waarde moeten alle bolletjes van de rij boven de rechte liggen. Of nog: hoe groot r ook is, er moet steeds een waarde N zijn zodat als $n > N$ dan $u_n > r$.

De wiskundige definitie van **divergentie naar** $+\infty$ **van een rij u** is dus:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow u_n > r}$$

Analoog vind je ook (spiegel de voorgaande grafiek tov de x-as):

De wiskundige definitie van **divergentie van een rij u naar** $-\infty$**,** of $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ is:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall r > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow u_n < -r}$$