Limiet van een functie

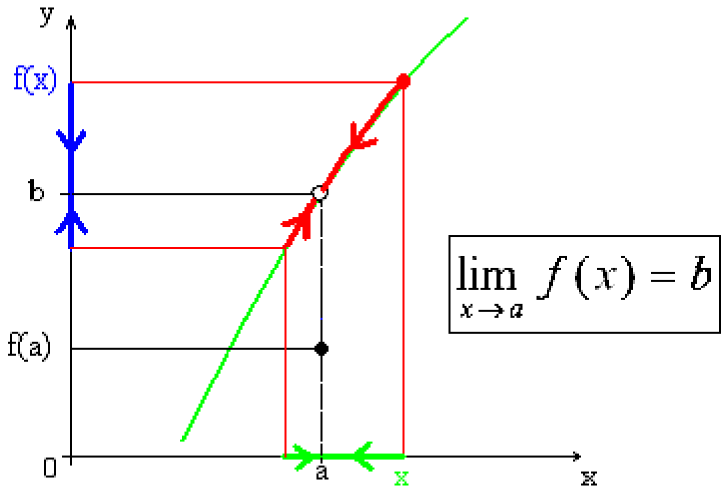
1. Limiet van een functie in een punt.

   1.1. Geval 1: Limiet van een functie in een punt is een reëel getal.

   Intuïtief:

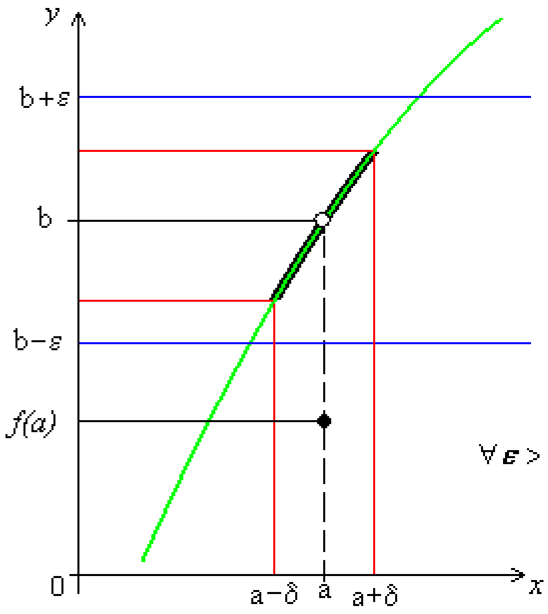
limiet van een functie in een punt = de verwachte functiewaarde in dat punt. = de *y*-waarde die je bekomt door de grafiek van *f(x)* te volgen als *x* nadert naar dat punt.

Dit wordt geïllustreerd op de onderstaande grafiek. De limiet in het punt *a* vind je grafisch als volgt: plaats een balpen (1) op de x-as en een andere balpen (2) op het punt van de grafiek recht boven de eerste balpen. Nader met (1) langs de x-as naar *a* en volg tegelijkertijd met (2) mee op de grafiek. Als je met (1) in *a* zit ben je met (2) in een bepaald punt gekomen. Doe dit langs beide zijden dus naderen langs links en langs rechts. Blijkbaar kom je voor deze grafiek in beide gevallen in het zelfde punt terecht. De *y*-waarde van dit punt is de limiet van *f* in *a*.
Opmerking: **Je moet dus NIET kijken naar de effectieve functiewaarde!** De limiet is de verwachte functiewaarde en dit kan totaal verschillend zijn van de echte functiewaarde.



Hoe kunnen we dit nu wiskundig definiëren?
Teken een horizontale strook $\left]b-\varepsilon, b+\varepsilon\right[$ symmetrisch t.o.v b .
Dat de limiet van *f(x)* in het punt *a* dan gelijk is aan *b* kan je als volgt uitdrukken: Hoe dicht je ook bij *b* zit, m.*a*.w hoe smal de strook rond *b* ook is, als *x* voldoende dicht bij *a* ligt (maar niet in *a*), dus binnen een verticale strook $\left]a-\delta, a+\delta\right[, x \neq a$ dan zal *f(x)* steeds binnen de strook rond *b* liggen. Of nog: Hoe klein ε ook is er bestaat altijd een δ>0 zodat als $x \in \left]a-\delta, a+\delta\right[, x \neq a$ dan $f(x) \in \left]b-\varepsilon, b+\varepsilon\right[$.
$x \in \left]a-\delta, a+\delta\right[, x \neq a$ kan je herschrijven als: $0 < |x-a| < \delta$, $f(x) \in \left]b-\varepsilon, b+\varepsilon\right[$ als $|f(x)-b| < \varepsilon$. De ε–δ definitie van limiet van *f(x)* in *a* is *b* wordt dus:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon}$$



$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

1.2.Geval 2: Limiet van een functie in een punt is $+\infty$.

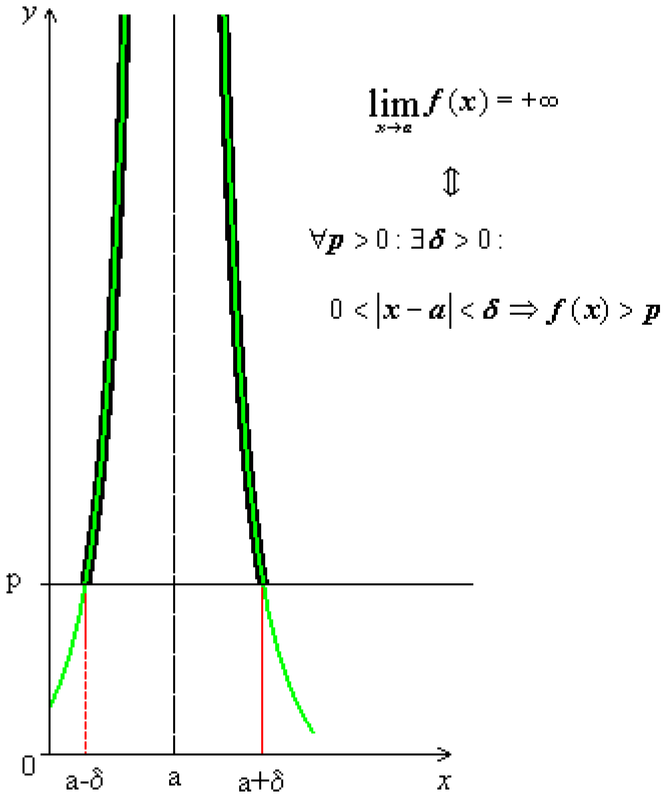
<u>Intuïtief:</u>

> limiet van een functie in een punt is $+\infty$ als de *y*-waarden die je bekomt door de grafiek van *f(x)* te volgen als *x* nadert naar dat punt steeds blijven toenemen.

Op onderstaande grafiek zie je dus: als je balpen (1) op de x-as naar *a* laat naderen dan zal balpen (2) steeds hoger en hoger komen te liggen. En dit is zo langs beide zijden van *a*, dus als je nadert langs links en langs rechts. We zeggen dat de limiet in *a* dan gelijk is aan $+\infty$.
Opmerking: Je moet dus NIET kijken naar een eventuele functiewaarde!

Hoe kunnen we dit nu wiskundig definiëren?
Teken een horizontale rechte $y = p$.
Dat de limiet van *f(x)* in het punt *a* dan gelijk is aan $+\infty$ kan je als volgt uitdrukken: Hoe hoog deze rechte ook ligt, m.a.w hoe groot *p* ook is, als *x* voldoende dicht bij *a* ligt (maar niet in *a*), dus binnen een verticale strook $]a - \delta, a + \delta[, x \neq a$ dan zal *f(x)* steeds boven *p* liggen. Of nog: Hoe groot *p* ook is er bestaat altijd een δ>0 zodat als $x \in]a - \delta, a + \delta[, x \neq a$ dan $f(x) > p$.
De ε–δ definitie van limiet van *f(x)* in *a* is $+\infty$ is dus:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall p > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > p}$$



1.3.Geval 3: Limiet van een functie in een punt is $-\infty$.

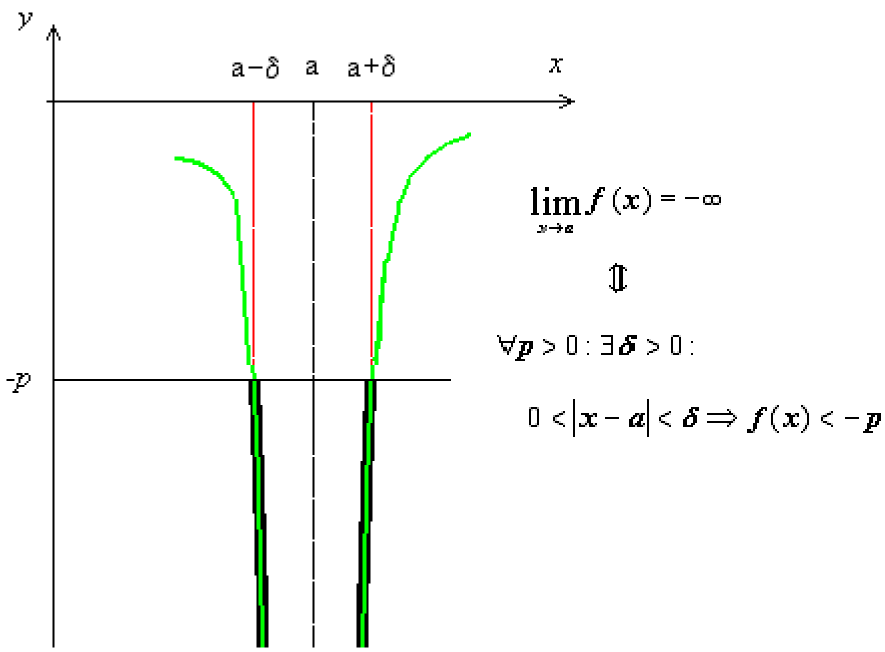
Intuïtief:

limiet van een functie in een punt is $-\infty$ als de *y*-waarden die je bekomt door de grafiek van *f(x)* te volgen als *x* nadert naar dat punt steeds blijven afnemen (of meer negatief worden).

Op onderstaande grafiek zie je dus: als je balpen (1) op de x-as naar *a* laat naderen dan zal balpen (2) steeds meer naar beneden liggen. En dit is zo langs beide zijden van *a*, dus als je nadert langs links en langs rechts. We zeggen dat de limiet in *a* dan gelijk is aan $-\infty$.
Opmerking: Je moet dus NIET kijken naar een eventuele functiewaarde!

Hoe kunnen we dit nu wiskundig definiëren?
Volledig aanloog. Teken nu een horizontale rechte $y = -p$.
De limiet van *f(x)* in het punt *a* is dan gelijk aan $-\infty$ als: hoe laag deze rechte ook ligt, m.a.w hoe groot *p* ook is, als *x* voldoende dicht bij *a* ligt (maar niet in a), dus binnen een verticale strook $]a-\delta, a+\delta[, x \neq a$ dan zal *f(x)* steeds onder *-p* liggen. Of nog: Hoe groot *p* ook is, er bestaat altijd een δ>0 zodat als $x \in]a-\delta, a+\delta[, x \neq a$ dan $f(x) < -p$.
De ε–δ definitie van limiet van *f(x)* in *a* is $-\infty$ is dus:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall p > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -p}$$



Opmerking: In deze definities van limiet in een punt *a* komt steeds de voorwaarde $0 < |x - a|$, of $x \neq a$ voor. Dit is absoluut noodzakelijk omdat de functiewaarde in *a*, *f(a)*, niet mag voorkomen in de uitdrukking. Om de limiet te bepalen in een punt moet je geen rekening houden met de functiewaarde in dat punt!

2. Limiet van een functie in $\pm\infty$.

Intuïtief:

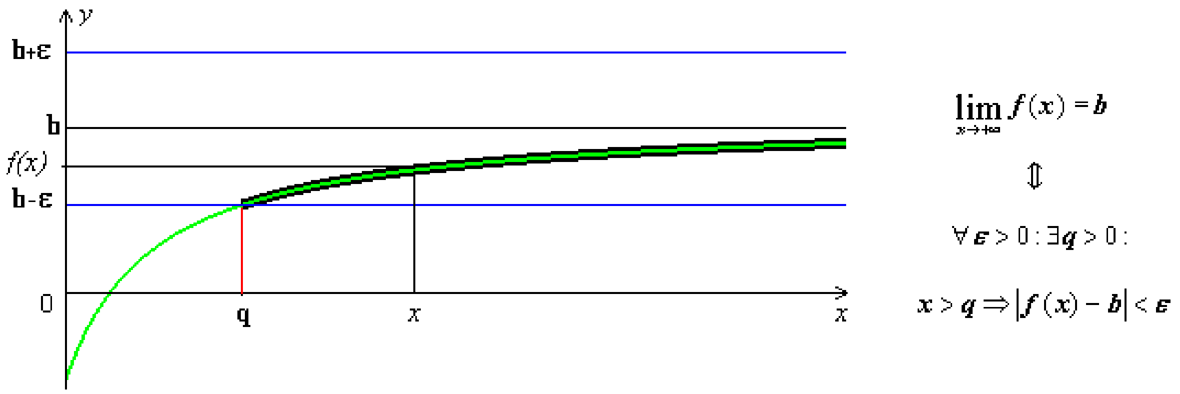
limiet van een functie in $+\infty$ ($-\infty$)is de *y*-waarde waarnaar de grafiek van *f(x)* evolueert als *x* steeds verder naar rechts toeneemt (respectievelijk naar links afneemt).

Belangrijke opmerking: De limiet in $+\infty$ kan enkel berekend worden als het definitiegebied van de functie reikt tot in $+\infty$ (als dus het definitiegebied een interval $]q,+\infty[$ omvat). Analoog kan de limiet in $-\infty$ enkel berekend worden als het definitiegebied reikt tot in $-\infty$.

Er zijn 3 mogelijkheden voor de limietwaarde: een reëel getal, $+\infty$ of $-\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

  Dit is te vergelijken met een convergente rij (fris even op). Bekijk maar de volgende figuur.



Hoe smal de strook $\left]b-\varepsilon, b+\varepsilon\right[$ ook is, als je voldoende ver naar rechts gaat moet de grafiek van *f(x)* volledig binnen de strook liggen. M.a.w hoe klein ε ook is er bestaat steeds een reëel getal q zodat als $x > q$ dan $f(x) \in \left]b-\varepsilon, b+\varepsilon\right[$.

De definitie is dus als volgt:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists q > 0 : x > q \Rightarrow \left|f(x) - b\right| < \varepsilon}$$

Volledig analoog (spiegel de bovenstaande grafiek t.o.v de *y*-as):

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists q > 0 : x < -q \Rightarrow \left|f(x) - b\right| < \varepsilon}$$

- bvb: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

  Als *x* onbeperkt naar rechts toeneemt dan zal *f(x)* ook onbeperkt (naar boven) toenemen.

  Op de grafiek: hoe hoog de horizontale rechte $y = p$ ook ligt, vanaf een bepaalde *x*-waarde *q* moet de grafiek boven de rechte liggen. Dus:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall p > 0 : \exists q > 0 : x > q \Rightarrow f(x) > p}$$

  Analoog bekom je:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall p > 0 : \exists q > 0 : x > q \Rightarrow f(x) < -p}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall p > 0 : \exists q > 0 : x < -q \Rightarrow f(x) > p}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall p > 0 : \exists q > 0 : x < -q \Rightarrow f(x) < -p}$$

  Je kan deze definities ook in woorden formuleren zoals hierboven. Doe dit eens voor jezelf!

3. <u>Linker- en rechterlimiet van een functie in een punt.</u>

Soms kan het gedrag van een functie in een punt als je nadert naar dit punt langs links helemaal anders als wanneer je nadert langs rechts. Vandaar dat men ook de begrippen rechter- en linkerlimiet invoert.

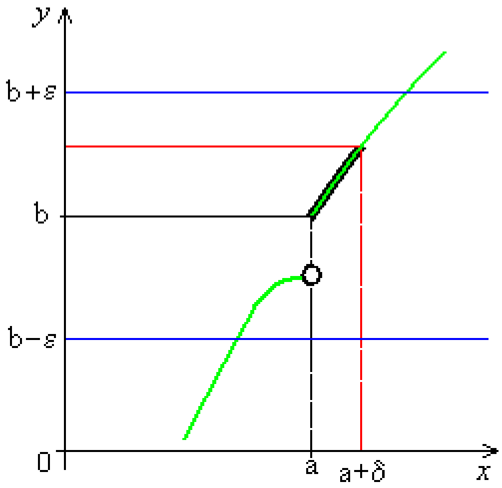
<u>Intuïtief:</u>

- De <u>rechterlimiet</u> van een functie in een punt is de *y*-waarde die je bekomt door de grafiek van *f(x)* te volgen als *x* nadert naar dat punt maar enkel langs rechts (dus *x*>*a*).
- De <u>linkerlimiet</u> van een functie in een punt is de *y*-waarde die je bekomt door de grafiek van *f(x)* te volgen als *x* nadert naar dat punt maar enkel langs links (dus *x*<*a*).

Notatie: Rechterlimiet: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$, Linkerlimiet: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$

We stellen bij wijze van voorbeeld in 2 gevallen de definitie op.

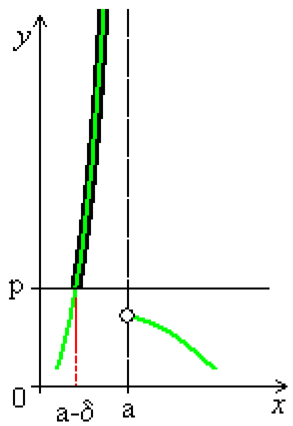
- Bekijk eerst de volgende grafiek:



Intuïtief:
Volg de grafiek als je op de *x*-as langs rechts nadert naar *a*. Als je dan in *a* komt, kom je op de grafiek terecht in een punt met *y*-coordinaat *b*. De rechterlimiet van *f* in *a* is dus gelijk aan *b*.
Wiskundige definitie:
De rechterlimiet van *f(x)* in *a* is voor deze grafiek gelijk aan *b* omdat: hoe smal de horizontale strook rond *b* ook is, als je rechts van *a* dicht genoeg bij *a* blijft dan liggen de corresponderende functiewaarden steeds in die strook rond *b*. M.a.w hoe klein ε ook is, er bestaat steeds een δ zodat als $0 < x < a + \delta$ dan $f(x) \in \left]b - \varepsilon, b + \varepsilon\right[$.
De definitie wordt dus:

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : a < x < a + \delta \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon}$$

- Een tweede voorbeeld:



Als *x* langs links nadert naar *a* dan nemen de functiewaarden onbeperkt toe dit betekent dat de linkerlimiet van *f* in *a* gelijk is aan $+\infty$. Wiskundig betekent dit dat hoe hoog we de rechte $y = p$ ook leggen, als we dicht genoeg bij *a* blijven (en links ervan) zullen de corresponderende functiewaarden boven *p* liggen. Dus: hoe groot *p* ook is, er bestaat altijd een δ zodat als $a-\delta < x < a$ dan $f(x) > p$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall p > 0 : \exists \delta > 0 : a-\delta < x < a \Rightarrow f(x) > p}$$

De andere mogelijkheden kunnen op analoge manier afgeleid worden.

4. <u>Overzicht definities limieten.</u>

Hier vind je een overzicht van alle mogelijke gevallen. Het is de bedoeling dat je deze zelf kan opschrijven en dat je, omgekeerd, als je een definitie gekregen hebt de limiet die erbij hoort kan noteren.
Let hierbij dus goed op de structuur van de definities: de 2 middelste leden geven aan waar je de limiet neemt, de 2 uiterste delen hebben steeds betrekking op de limietwaarde.
Bvb.:

- Noteer de definitie van $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = -1$.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 2 < x < 2+\delta \Rightarrow |f(x)+1| < \varepsilon$$

- Noteer de limiet die hoort bij de volgende definitie:

$$\forall \gamma > 0 : \exists s > 0 : x < -s \Rightarrow |f(x)+3| < \gamma$$

Laat je hier niet van de wijs brengen door het gebruik van andere letters. Je moet enkel goed kijken naar de structuur: $\exists s > 0 : x < -s$ betekent limiet nemen in $-\infty$, $\forall \gamma > 0 : ... \Rightarrow |f(x)+3| < \gamma$ houdt in dat de limietwaarde gelijk is aan –3. De limiet is dus: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -3$.