Definitie van het getal e : uitleg bij het bewijs van de convergentie

Definitie van e : e = limiet van de rij u met algemene term: $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

M.a.w. : $\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

Alvorens we dit zomaar mogen stellen moeten we uiteraard aantonen dat deze limiet bestaat, m.a.w. dat de rij u_n convergent is. Om de convergentie aan te tonen maken we gebruik van stelling 3.1: Als u_n monotoon stijgend is en u_n is naar boven begrensd, dan is u_n convergent.

We tonen dit nu aan:

We werken eerst de algemene term u_n uit met het binomium van Newton (Klik hier voor meer uitleg omtrent het binomium van Newton) :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+...+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+...+\binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}}+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2}+...+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+...+\frac{n(n-1)...(n-(n-2))}{(n-1)!}\frac{1}{n^{n-1}}$$

$$+\frac{n(n-1)...(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n}$$

Splits nu de machten van n op: $n^k = n.n...n$ (k factoren) en plaats elk van deze factoren onder een factor van de teller:

$$= 1+1+\frac{1}{2}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}+...+\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}...\frac{n-(k-1)}{n}+...+\frac{1}{(n-1)!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}...\frac{n-(n-2)}{n}$$

$$+\frac{1}{n!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}...\frac{n-(n-1)}{n}$$

Tenslotte kunnen we de verschillende breuken ook nog schrijven als: $\frac{n-a}{n} = 1-\frac{a}{n}$. Hiermee bekomen we dan de vorm van de algemene term van rij u waarmee we het bewijs van de convergentie kunnen aanvangen:

$$\boxed{u_n = 1+1+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})+...+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{k-1}{n})+...+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{n-1}{n})}$$

We moeten 2 dingen bewijzen:

1. u_n is strikt monotoon stijgend:

   We moeten dus u_{n+1} vergelijken met u_n. Hiertoe stellen we een uitdrukking op voor u_{n+1}. Bekijk hiertoe goed de structuur van u_n :

   - u_n heeft n+1 termen (lopend van 0 tot n) dus zal u_{n+1} n+2 termen moeten hebben lopend van 0 tot n+1.

- In u_n staat in de noemers van de factoren telkens n dus voor u_{n+1} zal dit n+1 moeten zijn.

Een uitdrukking voor u_{n+1} is dus:

$$u_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n+1})+...+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})...(1-\frac{k-1}{n+1})+...+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})...(1-\frac{n-1}{n+1})$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})...(1-\frac{n}{n+1})$$

Vergelijk dit nu met:

$$u_n = 1+1+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})+...+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{k-1}{n})+...+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{n-1}{n})$$

De 2 eerste termen zijn dezelfde. Voor de volgende termen geldt dat de factoren van u_{n+1} groter zijn dan de corresponderende factoren van u_n. Dit volgt onmiddellijk via een eenvoudige afleiding:

$$n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow ... \Rightarrow 1-\frac{a}{n+1} > 1-\frac{a}{n} \text{ (voor alle } a = 1,2,...,n-1)$$

Daarenboven komt er nog een term bij, nl.: $\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})...(1-\frac{n}{n+1})$ die duidelijk positief is.

Conclusie: $\boxed{u_{n+1} > u_n}$

2. u_n is naar boven begrensd:

Vertrek terug van:

$$u_n = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+...+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{k-1}{n})+...+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{n-1}{n})$$

Omdat $1-\frac{a}{n} < 1$ (voor alle $a = 1,2,...,n-1$) geldt onmiddellijk dat:

$$u_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{k!}+...+\frac{1}{n!}$$

Van de som in het rechterlid kunnen we geen algemene gesloten gedaante opstellen. Van een meetkundige reeks kunnen we dit wel dus proberen we de som om te zetten naar de vorm van een meetkundige reeks.
Als we in de optredende faculteiten alle getallen groter dan 2 vervangen door 2 dan krijgen we uiteraard een kleiner getal, dus worden de termen uit de som groter. Dus:

$3! = 3.2.1 > 2.2.1 = 2^2 \qquad \Rightarrow \frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$

$4! = 4.3.2.1 > 2.2.2.1 = 2^3 \qquad \Rightarrow \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$

…

$k! = k.(k-1)...2.1 > 2.2....2.1 = 2^{k-1} \qquad \Rightarrow \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$

…

Hieruit volgt dus dat:

$$u_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{k-1}}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})^2+...+(\tfrac{1}{2})^{k-1}+...+(\tfrac{1}{2})^{n-1}$$

Gebruik makend van de formule voor de reekssom van een meetkundige reeks met reden q, nl. $1+q+q^2+...+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$, kunnen we dit ook schrijven als:

$$u_n < 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+2(1-(\tfrac{1}{2})^n) < 1+2 = 3$$

De rij u_n is dus naar boven begrensd door 3.