<u>Continuïteit van functies</u>

Continuïteit in een punt.

Continuïteit is in essentie een **lokaal begrip** d.w.z. wordt gedefinieerd **in een punt** van het definitiegebied.

<u>Intuïtieve definitie van continuïteit:</u>

> Een functie *f* is continu in een punt *a* a.s.a de **verwachte functiewaarde** in dat punt (**de limiet** dus) samenvalt met de **echte functiewaarde** in dat punt. M.a.w de *y*-waarde die je bekomt door de grafiek te volgen is effectief de functiewaarde.
>
> Grafisch kenmerk:
> Er is geen sprong in de grafiek in het punt, je kan de grafiek tekenen zonder je pen op te heffen in dat punt.

<u>Wiskundige definitie:</u>

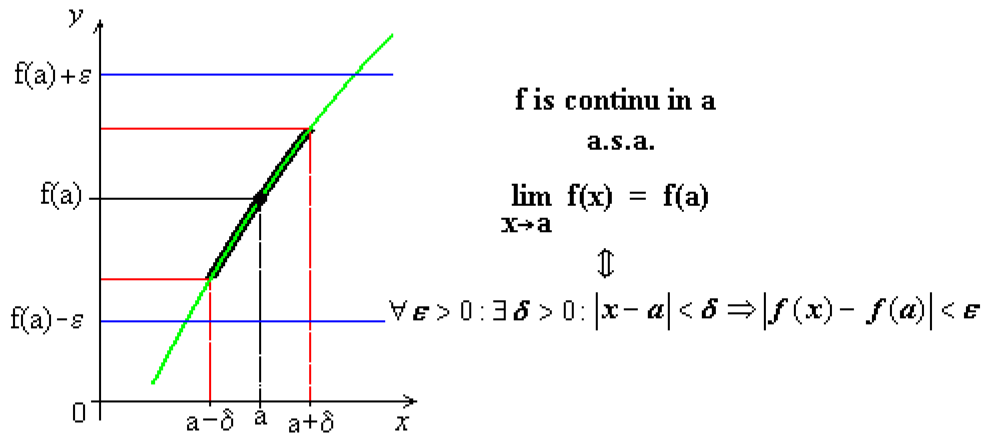
> De functie *f* is continu in het punt $a \in def(f)$ a.s.a.
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Gebruik makend van de definitie van $\lim_{x \to a} f(x) = b$ (<u>even opfrissen</u>) waarbij je *b* vervangt door *f(a)* bekom je dus onmiddellijk:

> De functie *f* is continu in het punt $a \in def(f)$ a.s.a.
>
> $$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Merk ook op dat de voorwaarde $0 < |x - a|$ of $x \neq a$ niet meer opgenomen is in deze definitie. Omdat $a \in def(f)$ bestaat *f(a)* zeker. Het laatste lid van de uitdrukking geeft dus nu geen problemen voor $x = a$, je bekomt immers $|f(a) - f(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < \varepsilon$ en dit is steeds voldaan.

De definitie wordt geïllustreerd op de volgende figuur:



<u>Alternatieve vormen van de definitie:</u>

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0$$

Stel hierin $x = a + h$ dan wordt dit nog:

$$\boxed{\lim_{h \to 0}(f(a+h) - f(a)) = 0}$$

h noemt men dikwijls de toename van het argument *a* en noteert men ook als: $\Delta_h a = h$. (Lees dit als: *h* is de toename van *a* met *h*). Deze toename kan zowel positief zijn (dan is $h > 0$ en ligt $a + h$ rechts van *a*) ofwel negatief (dan is $h < 0$ en ligt $a + h$ links van *a*). Deze toename op het argument brengt een verandering teweeg in de functiewaarden. Deze corresponderende toename van de functiewaarde is gelijk aan $f(a+h) - f(a)$ en wordt genoteerd als $\Delta_h f(a)$ (Lees dit als: de toename van *f* als *a* toeneemt met *h*).
Continuïteit wil dus zeggen: <u>als de toename van het argument naar 0 gaat dan moet de corresponderende toename van de functiewaarden ook naar 0 gaan, m.a.w er is geen sprong in de functiewaarden in het punt.</u>

<u>Berekenen van limiet dankzij continuïteit</u>:
Je kan de definitie van continuïteit ook aanwenden bij het berekenen van limieten. Stel dat je weet dat een functie continu is in een punt dan kan je de limiet in dat punt berekenen door eenvoudigweg de functiewaarde te nemen. In de praktijk gaat men bij het berekenen van een limiet altijd eerst trachten de functiewaarde te nemen.

<u>Discontinuïteit van een functie</u>:

> Een functie *f* is discontinu in een punt *a* :
> - als *f* niet gedefinieerd is in *a* of:
> - als de limiet niet gelijk is aan de functiewaarde. Dit laatste betekent dat er een sprong optreedt in de grafiek in het punt *a*.

Linkscontinuïteit en rechtscontinuïteit:

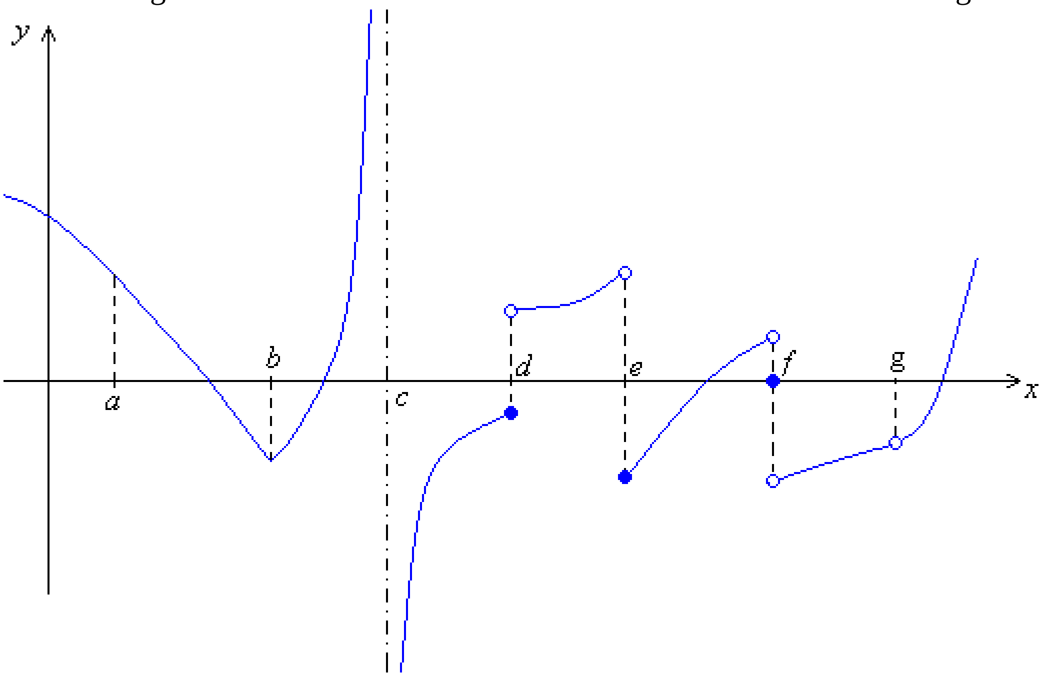
Een functie *f* is **linkscontinu** in een punt *a* a.s.a de linkerlimiet in *a* gelijk is aan de functiewaarde in *a*. M.a.w de *y*-waarde die je bekomt door de grafiek te volgen links naderend naar a is de functiewaarde.

Een functie *f* is **rechtscontinu** in een punt *a* a.s.a de rechterlimiet in *a* gelijk is aan de functiewaarde in *a*. M.a.w de *y*-waarde die je bekomt door de grafiek te volgen rechts naderend naar a is de functiewaarde.

Als een functie continu is in een punt is ze zeker ook links- en rechtscontinu in dat punt.
Als een functie links- en rechtscontinu is in een punt dan is ze ook continu in dat punt.

Illustratie van de definities:

Op onderstaande grafiek worden de definities van continuïteit en discontinuïteit geïllustreerd.



- De functie is continu in het punt *a*: de limiet in *a* is gelijk aan de functiewaarde, er zit geen sprong in de grafiek in *a*.
- De functie is continu in *b*: Er is geen sprong in *b*, de grafiek maakt wel een knik maar je moet je pen niet opheffen om de grafiek te tekenen in de buurt van *b*.
- De functie is discontinu in *c* want ze is niet gedefinieerd in *c*.
- De functie is discontinu in *d* want er is een sprong in functiewaarde in *d*. De functie is wel linkscontinu in *d* want de linkerlimiet in *d* is gelijk aan de functiewaarde (aangeduid met het bolletje), ze is niet rechtscontinu in *d* want de rechterlimiet (*y*-waarde van het cirkeltje) is niet gelijk aan de functiewaarde.

- De functie is discontinu in *e* want er is een sprong in functiewaarde in *e*. De functie is niet linkscontinu in *e* want de linkerlimiet in *e* (*y*-waarde van het cirkeltje) is niet gelijk aan de functiewaarde, ze is wel rechtscontinu in *e* want de rechterlimiet is wel gelijk aan de functiewaarde(aangeduid met het bolletje).
- De functie is discontinu in *f* want er is een sprong in functiewaarde in *f*. De functie is niet linkscontinu in *f* want de linkerlimiet in *f* (*y*-waarde van het cirkeltje) is niet gelijk aan de functiewaarde, de rechterlimiet is ook niet gelijk aan de functiewaarde (aangeduid met het bolletje) dus is de functie ook niet rechtscontinu.
- De functie is discontinu in g want ze is niet gedefinieerd in g.

<u>Continue uitbreiding:</u>

Bekijk de volgende grafieken. Op de linkergrafiek is de functie met voorschrift $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ voorgesteld. Deze functie is niet gedefinieerd in $x = 1$ (want delen door 0 mag niet) en dus is de functie discontinu in 1. Als $x \neq 1$ dan kunnen we de gemeenschappelijke factor wegdelen en bekomen we als voorschrift $f(x) = x^2 + x + 1, x \neq 1$. De grafiek van f is dus een parabool met een gat in ter hoogte van $x = 1$.
Omdat de limiet in 1 bestaat, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, kunnen we de functie continu uitbreiden door in $x = 1$ de functiewaarde gelijk te stellen aan 3. Grafisch betekent dit dat we het gat in de grafiek opvullen. Voor dit voorbeeld is dus de continue uitbreiding de functie $f^*(x) = x^2 + x + 1$, waarvan de grafiek de volledige parabool is.