<u>Continuïteit van goniometrische functies en cyclometrische functies</u>

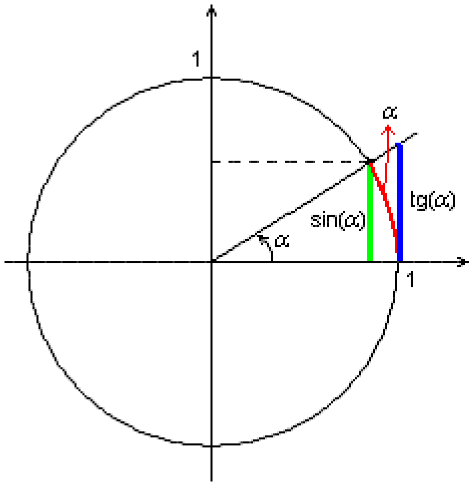
- Continuiteit van $\sin(x)$ in $x = 0$:

  te bewijzen is dat : $\lim\limits_{\alpha \to 0} \sin(\alpha) = \sin(0) = 0$

  Het bewijs volgt door toepassing van de sandwichregel voor limieten op de ongelijkheid:

  $$0 < \sin(\alpha) < \alpha$$

  Deze ongelijkheid volgt uit de meetkundige voorstelling van $\sin(\alpha)$ op de goniometrische cirkel. Bekijk maar eens de onderstaande figuur:



De sandwichregel geeft: $\lim\limits_{\alpha \to 0} 0 = 0, \lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha = 0$ dus : $\lim\limits_{\alpha \to 0} \sin(\alpha) = 0$.

- Continuïteit van $\sin(x)$ in een willekeurig punt x_0.

  Om dit aan te tonen gebruiken we een alternatieve vorm van de definitie. Fris eerst even op. Te bewijzen is dus dat:

  $$\lim_{h \to 0} (\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)) = 0$$

  We doen dit ook via de sandwichregel. Pas de formules van Simpson toe:

  $$\sin(x_0 + h) - \sin(x_0) = 2\sin(\frac{h}{2})\cos(x_0 + \frac{h}{2})$$

  Neem van beide leden de absolute waarde dan krijgen we, omdat een absolute waarde steeds ≥ 0 en omdat de cosinus functie naar boven begrensd is door 1: $\left|\cos(x_0 + \frac{h}{2})\right| \leq 1$

  de volgende reeks ongelijkheden:

  $$0 \leq \left|\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)\right| = \left|2\sin(\frac{h}{2})\cos(x_0 + \frac{h}{2})\right| = 2\left|\sin(\frac{h}{2})\right|\left|\cos(x_0 + \frac{h}{2})\right| \leq 2\left|\sin(\frac{h}{2})\right|$$

  We weten: $\lim\limits_{h \to 0} 0 = 0, \lim\limits_{h \to 0} \sin(\frac{h}{2}) = 0$ (uit de continuïteit van sin in 0). Dus geldt volgens de sandwichregel ook dat $\lim\limits_{h \to 0} \left|\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)\right| = 0$ en dus ook $\lim\limits_{h \to 0} (\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)) = 0$.

- Continuïteit van de cosinusfunctie.

  De continuïteit van de cosinusfunctie volgt uit het verband tussen cosinus en sinus en uit de stelling i.v.m. samenstellen van continue functies (klik hier ter herinnering):

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \text{ (of } \cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)\text{)}$$

  De functie $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ is continu in elk punt $x_0 \in R$, sin is continu in over R dus ook in het punt $f(x_0) = x_0 + \frac{\pi}{2}$ dus is $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ continu in elk punt $x_0 \in R$

- Continuïteit van tg en cotg:

  Dit volgt uit de respectievelijke definities en uit stelling 3.6.:
  $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, sin is continu in gans *R*, cos is continu in gans *R* dus is *tg(x)* continu in alle punten waar *tg(x)* gedefinieerd is, dus in $def(tg) = R / \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$.

- Continuïteit van de cyclometrische functies.

  Omdat de cyclometrische functies de inverse functies zijn van de goniometrische functies volgt de continuïteit ervan onmiddellijk uit de stelling van de strikt monotone continue functies (Stelling 3.12).
  bvb voor *bgsin(x)*
  sin(x) is continu in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, en is strikt monotoon stijgend op dit interval. Wegens stelling 3.12 is dan *bgsin(x)* continu in $\left[\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2}) \right] = [-1,1]$ (en strikt monotoon stijgend).