# Continuïteit van functies

## Continuïteit in een interval.

> Een functie *f* is continu in een open interval $]a,b[$ als ze continu is in elk punt van dit interval.
>
> Een functie *f* is continu in een gesloten interval $[a,b]$ als ze continu is in het open interval $]a,b[$ en rechtscontinu in *a* en linkscontinu in *b*.

Je kan zelf soortgelijke definities geven voor continuïteit op half open intervallen en oneindige intervallen.

Gelijkmatige continuïteit in een interval I.

Merk vooreerst op dat gelijkmatige continuïteit een **globaal** begrip is. Je kan niet spreken van gelijkmatige continuïteit in een punt enkel over **gelijkmatige continuïteit in een interval.**
Wat is nu voorts het verschil tussen gewone continuïteit in een interval en gelijkmatige continuïteit in een interval. Bekijk de definities:

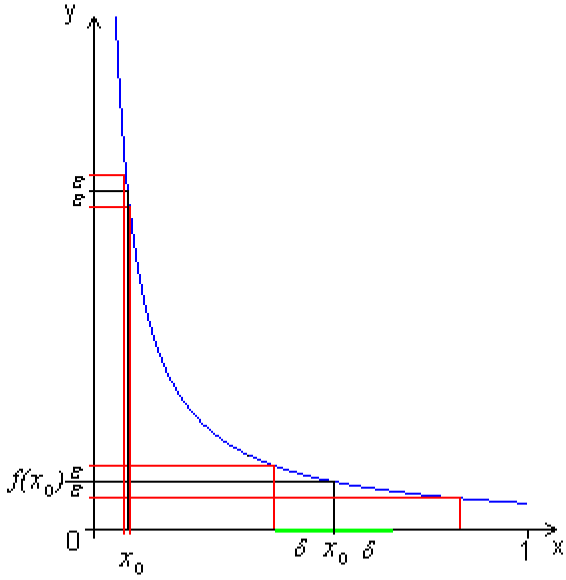
> Een functie *f* is continu in een interval I als ze continu is in elk punt $x_0$ van dit interval. M.a.w als geldt:
> $$\forall x_0 \in I : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Hier staat: "voor elke $x_0$ en voor elke $\varepsilon$ bestaat er een $\delta$,…": De waarde voor $\delta$ **hangt dus af zowel van $\varepsilon$ als van het punt $x_0$** waarin je de continuïteit bekijkt, en verandert dus als je $\varepsilon$ zou constant houden van punt tot punt. Je hebt dus in elk punt in principe een andere $\delta$ (voor dezelfde $\varepsilon$). Dit accentueert nog eens dat continuïteit een lokaal begrip is want in elk punt van het interval heb je een plaatselijke(lokale) $\delta$ (horend bij gegeven $\varepsilon$).

> Een functie *f* is gelijkmatig continu in een interval I als geldt:
> $$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_0, x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Hier staat: "voor elke $\varepsilon$ bestaat er een $\delta$ zodat voor elke $x_0$ en $x$,….": De waarde voor $\delta$ **hangt dus hier enkel af van $\varepsilon$**. Gelijkmatige continuïteit is dus een globaal begrip want in elk punt van het interval kan je 1 en dezelfde $\delta$, dus een globale $\delta$, gebruiken (voor gegeven $\varepsilon$).

Ter illustratie beschouwen we het volgende voorbeeld.
$f(x) = \frac{1}{x}$ in het interval $]0,1[$.
Deze functie is niet gelijkmatig continu in dit interval. Waarom?




Op de figuur zijn 2 punten aangeduid waarbij we voor beide punten dezelfde $\varepsilon$ gekozen hebben. In de grootste waarde verloopt de grafiek relatief vlak. De met $\varepsilon$ corresponderende $\delta$ is aangeduid op de figuur. Als we nu dichter bij 0 komen wordt de grafiek heel stijl. Dit heeft tot gevolg dat de waarde voor $\delta$ dan heel klein wordt en hoe dichter bij 0 hoe kleiner deze wordt, in de limiet voor *x* naderend naar 0 wordt dit zelfs 0. De functie heeft een verticale asymptoot in $x = 0$ (zie Hoofdstuk 5), de grafiek is dus praktisch verticaal dichtbij 0. Vandaar dat je voor deze functie geen $\delta > 0$ kan vinden die in elk punt kan gebruikt worden. De functie is dus niet gelijkmatig continu in ]0,1[.

Je kan het ook anders bekijken: Als je heel dicht bij 0 een kleine wijziging geeft aan *x* (een kleine schommeling dus) resulteert dit, omdat de grafiek praktisch verticaal is, in een heel grote wijziging van de *y*-waarden. De schommeling op de *y*-waarden "ontploft" dus dichtbij 0 en dit mag niet voor gelijkmatige continuïteit.

<u>Opmerking</u>: Het interval waarover de continuïteit bekeken wordt speelt een grote rol. Als je dezelfde functie $f(x) = \dfrac{1}{x}$ beschouwt over het interval $\left]\tfrac{1}{2}, 1\right[$ dan is deze wel gelijkmatig continu over dit interval. De verticale asymptoot $x = 0$ is immers geen randpunt van dit interval.

<u>Praktisch</u> heb je nu het volgende:
- De meeste functies die in de praktijk en in deze cursus voorkomen zijn gelijkmatig continu op hun definitiegebied.
- Enkel de functies die 1 of meerdere asymptoten vertonen (hoe je dit moet controleren zie H 5) als randpunt van het interval zijn niet gelijkmatig continu over dat interval. Ze zijn wel gelijkmatig continu over intervallen die deze asymptoten niet bevatten.
- Over een gesloten interval is een continue functie ook steeds gelijkmatig continu. (Stelling van Heine)