# Samenstellen van relaties en van functies.

1. **samenstellen van relaties**

Vb.: U = {a,b,c}; V = {1,2,3,4}; W = {A,B,C}

**R** = relatie van U naar V = {(a,1),(a,2),(c,2),(c,4)}
**R** ‘ = relatie van V naar W = {(1,B),(2,B),(3,C),(4,C)}

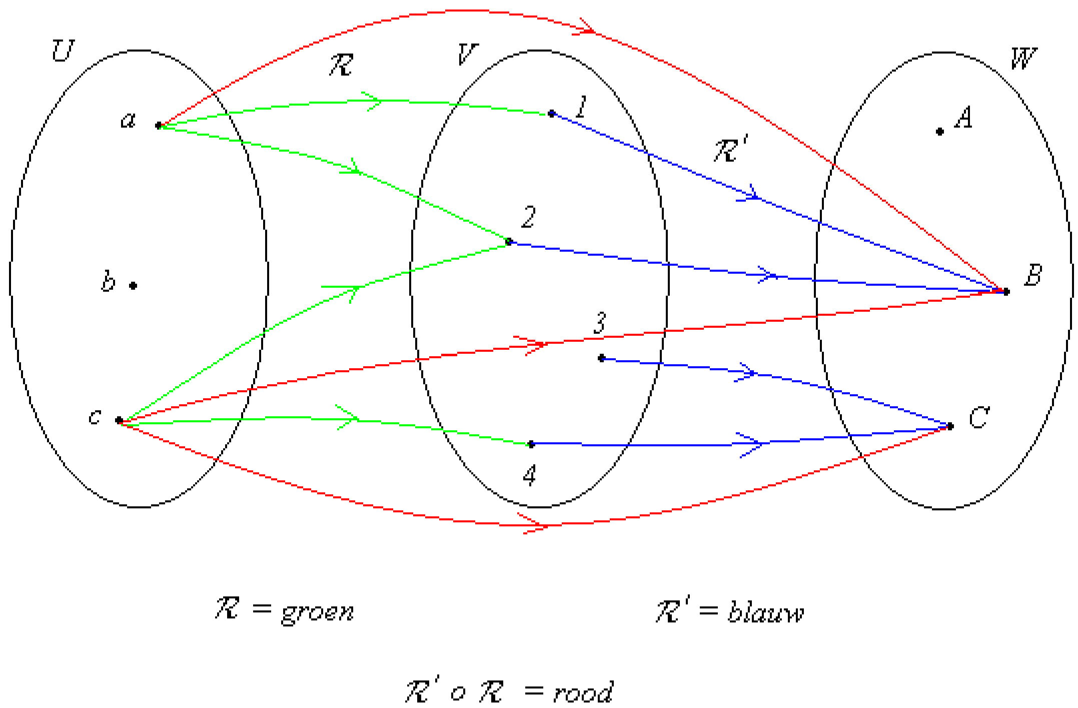
Dan is de **samenstelling** van **R** en **R**’, genoteerd **R**’o **R** (lees: **R’ na R**) een **relatie van U naar W** waarvan we de koppels vinden door alle koppels van **R** ‘ waarvan het 1^ste^ element (een herkomst van **R**’) ook optreedt als 2^de^ element van een koppel van **R** (een bestemming van **R** ) te combineren met dit koppel van **R**, waarbij we het gemeenschappelijke element weglaten.
Als we dit toepassen op ons voorbeeld zal dit veel duidelijker worden:

| Koppel **R** | Koppel **R**’ | Resulterend koppel **R**’o **R** |
|---|---|---|
| (a,1) | (1,B) | (a,B) |
| (a,2) | (2,B) | (a,B) |
| (c,2) | (2,B) | (c,B) |
| (c,4) | (4,C) | (c,C) |

De samengestelde relatie is dus (het dubbel optredend koppel (a,B) schrijven we uiteraard maar 1 keer): **R**’o **R** = {(a,B),(c,B),(c,C)}

<u>Merk op</u>: enkel de koppels van **R** ‘ waarvan de herkomst overeenkomt met een bestemming van **R** worden gebruikt. Het koppel (3,C) van **R**’ wordt dus niet gebruikt in ons voorbeeld.
We kunnen dit nog anders zeggen. Enkel die elementen van *def*(**R**’) komen in aanmerking die ook in *Im*(**R**) zitten. Opdat de samenstelling zou bestaan moet dus *def*(**R**’) ∩ *Im*(**R**) ≠∅

De samenstelling kan ook bekomen worden door gebruik te maken van de pijlenvoorstelling.
Zoals aangegeven op onderstaande figuur.



Opmerking: Om het definitiegebied en/of waardeverzameling te bepalen van een samenstelling of om na te gaan of een samenstelling van relaties een functie, afbeelding, … is moet je eerst en vooral ofwel de koppels, ofwel de pijlenvoorstelling van de samenstelling bepalen. Op basis hiervan kan je dan het gevraagde afleiden.

## 2. samenstellen van functies

Als $f: U \to V : x \mapsto f(x)$ en $g: V \to W : x \mapsto g(x)$ twee functies zijn,
dan is de samenstelling van *f* en *g* de volgende functie *gof* (lees: **g na f**):

$$gof : U \to W : x \mapsto (gof)(x) = g(f(x))$$

Je vind dus het voorschrift van *gof* door in het voorschrift van *g(x), x* te vervangen door *f(x)*.

Merk op: dit heeft enkel zin als *f(x)* tot het definitiegebied van *g*, *def(g)* behoort.
M.a.w. opdat de samenstelling *gof* gedefinieerd is in een punt *x* moet:
(zie ook verder: bepalen van definitiegebied van een functie)

- $x \in def(f)$, *f(x)* moet immers bestaan
- *x* zodanig zijn dat: $f(x) \in def(g)$, dan bestaat *g(f(x))*

De samenstelling heeft dus enkel zin als:

$$\mathrm{Im}(f) \cap def(g) \neq \phi$$

Vbn:

1. $y = f(x) = \sqrt{x}$
   $y = g(x) = x^2 + 1$

   $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$

   $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$

   De volgorde waarin je de functies samenstelt speelt dus zeker een rol. Voor samenstellingen van functies geldt over het algemeen dat: $(gof)(x) \neq (fog)(x)$

2. De waarde van een aandeel *x* kan stijgen of dalen.
   - Als het aandeel op een dag stijgt met i% dan is zijn waarde na 1 dag gelijk aan
     $f(x) = x + \frac{i}{100}x = (1 + \frac{i}{100})x$
   - Als het aandeel op een dag daalt met j% dan is zijn waarde na 1 dag gelijk aan
     $g(x) = x - \frac{j}{100}x = (1 - \frac{j}{100})x$

   Gevraagd:
   a) Bepaal de waarde y van een aandeel met waarde *x* na 2 dagen als het de eerste dag stijgt met 5% en de 2$^{de}$ dag daalt met 10%.
   b) Bepaal de waarde y van een aandeel met waarde *x* na 2 dagen als het de eerste dag daalt met 10% en de 2$^{de}$ dag stijgt met 5%.
   Oplossing: We gebruiken de gegeven functies met *i=5* en *j=10*

a) $y = g(f(x)) = g(1.05x) = 0.90.(1.05x) = 0.945x$
b) $y = f(g(x)) = f(0.90x) = 1.05.(0.90x) = 0.945x$
We krijgen 2 keer hetzelfde resultaat. Zoals in vb1 gesteld is dit uitzonderlijk, het is in dit geval volledig te wijten aan het zuiver lineaire karakter van de functies *f* en *g*.

3. $y = f(x) = -x^2$
$y = g(x) = \sqrt{x-1}$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(-x^2) = \sqrt{-x^2-1} = \sqrt{-(x^2+1)}$

Omdat $-(x^2+1) < 0$ en een vierkantwortel enkel bestaat voor positieve getallen is deze samenstelling nergens gedefinieerd: $def(gof) = \phi$. Hoe komt dit?
Omdat $\text{Im}(f) = \left]-\infty,0\right]$ en $def(g) = \left[1,+\infty\right[$ geen gemeenschappelijke punten hebben!
(Hoe je aan deze verzamelingen komt: zie verder)

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = -(\sqrt{x-1})^2 = -(x-1) = -x+1$

Deze samenstelling is wel gedefinieerd, zelfs voor alle reële getallen. $\text{Im}(g) = \left[0,+\infty\right[$ is immers volledig begrepen in $def(f) = R$.

4. Als een van beide functies constant is kan het zijn dat de samenstelling van beide niet bestaat. bvb.:
$y = f(x) = 5$
$y = g(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2}$
Dan bestaat *gof* niet:
Inderdaad: $(gof)(x) = g(f(x)) = g(5) = \dfrac{1}{(5-5)^2} = \dfrac{1}{0}$ en dit bestaat niet in R.
*fog* bestaat wel:
$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\dfrac{1}{(x-5)^2}) = 5$

5. De functie $y = f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ is de samenstelling *hog* van de volgende 2 functies:

$g(x) = x-1$ en $h(x) = \dfrac{1}{x}$

Inderdaad: $(hog)(x) = h(g(x)) = h(x-1) = \dfrac{1}{x-1}$

6. De functie $y = f(x) = \sin(\sqrt{x^3+1})$ is de samenstelling van de volgende functies:

$g(x) = x^3$, $h(x) = x+1$, $u(x) = \sqrt{x}$ en $v(x) = \sin(x)$

Inderdaad:
$(vouohog)(x) = v(u(h(g(x)))) = v(u(h(x^3))) = v(u(x^3+1)) = v(\sqrt{x^3+1}) = \sin(\sqrt{x^3+1})$