<u>Inverse relatie van een functie – inverse functie</u>

<u>Inleiding:</u>

De inverse relatie f^{-1} van een functie is de relatie die ontstaat door de pijlen om te draaien dus door voor elke y te berekenen welke x-waarden ermee corresponderen.

Bvb.: Als $y = f(x) = 2x + 1$ dan volgt hier makkelijk uit door oplossen naar x, dat met y de volgende x-waarde correspondeert: $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$. In dit geval bestaat er voor elke y dus juist 1 x-waarde. De inverse relatie f^{-1} is dus opnieuw een functie en we spreken van de inverse functie f^{-1}.

Merk op dat de inverse relatie niet altijd terug een functie is zoals in dit vorige voorbeeld.

Neem bijvoorbeeld de volgende functie:
$y = f(x) = x^2$, oplossen naar x geeft dan: $x = f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$.
Dit kan enkel als $y \geq 0$, voor negatieve y-waarden bestaan er geen corresponderende x-waarden. Met elke positieve y corresponderen 2 x-waarden nl.: $\sqrt{y}$ en $-\sqrt{y}$. De inverse relatie is dus geen functie.

Wat kunnen we hieruit nu concluderen:
De inverse relatie van *f* zal zelf ook een functie zijn als met elke y ten hoogste 1 x overeenkomt en dit is bij definitie (<u>fris op</u>) net hetzelfde zeggen als de functie f is injectief.
Dus: de **inverse relatie van een functie** is opnieuw **een functie** a.s.a deze **functie een injectie** is.

Hoe kan je zien dat een functie injectief is?

- <u>uit het voorschrift</u>: los de vergelijking $y = f(x)$ op naar x (in functie van y dus) , m.a.w. bepaal $x = f^{-1}(y)$. Bestaat er voor elke y ten hoogste 1 x dan is *f* injectief, zijn er y-waarden waarmee meerdere x-en corresponderen dan is *f* niet injectief.

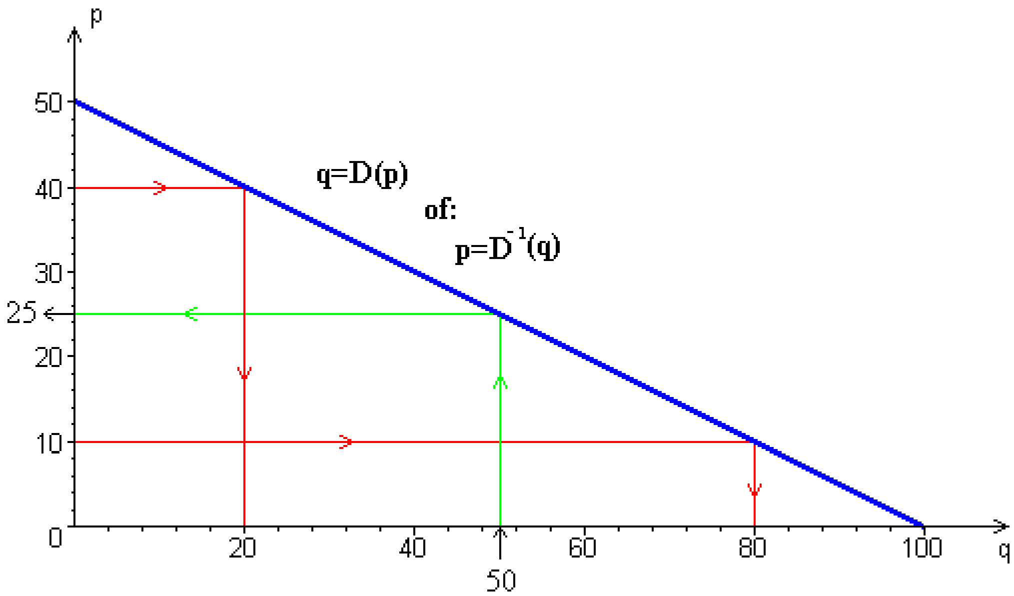
- <u>Uit de grafiek</u>: trek voor elke y-waarde een horizontale rechte. Als er y-waarden zijn waarvoor deze rechte meer dan 1 snijpunt heeft met de grafiek dan is de functie niet injectief. Heeft elke horizontale rechte maximum 1 snijpunt met de grafiek dan de functie wel een injectie.

<u>Eerste interpretatie van de inverse functie van een functie:</u>

Inleiding:
In de economie worden functies heel dikwijls gebruikt om een verband aan te geven tussen 2 economische grootheden. De vraagfunctie D bvb geeft het verband tussen de prijs p van een goed en het aantal goederen q dat verkocht wordt (=de vraag). Dit wordt genoteerd als: $q = D(p)$.
Soms echter wil men de prijs berekenen vertrekkende van een schatting van de vraag. Hiervoor moet men dus de functie kennen die p uitdrukt in functie van q en dit is net de inverse van de vraagfunctie: $p = D^{-1}(q)$

Bvb: $q = D(p) = 100 - 2p$

De grafiek van de functie D is een rechte door de punten (0,100) en (50,0).
In de economie heeft men de gewoonte van een vraagfunctie voor te stellen in een grafiek met de p-as op de vertikale-as en de q-as op de horizontale as. De grafiek van D ziet er dus als volgt uit (enkel positieve p en q-waarden hebben een economische betekenis):



Bij een verkoopprijs van p=10 Euro worden er $q = D(2) = 100 - 2.10 = 80$ stuks verkocht. Dit resultaat kunnen we onmiddellijk aflezen op de grafiek van D door een horizontale te trekken door p=10 tot aan de grafiek van D en dan vanuit dit punt een verticale te tekenen tot op de q-as. Dit geeft inderdaad q=80.
Bij p=40 Euro zijn er $q = 100 - 2.40 = 20$ stuks verkocht. Dit lees je op analoge manier af uit de grafiek.

Als we nu op een bepaald moment verwachten van 50 stuks te verkopen, welke prijs kunnen we dan per stuk vragen?
Als we de betrekking $q = 100 - 2p$ oplossen naar p krijgen we gemakkelijk:

$$p = D^{-1}(q) = \frac{100 - q}{2}$$

Voor q=50 is de prijs dus: $p = \frac{100 - 50}{2} = 25$ Euro.
Ook dit kunnen we makkelijk op de grafiek van D terugvinden. Vertrek nu op de horizontale as bij q=50 en trek een verticale tot aan de grafiek van D. Trek je nu vanuit dit punt een horizontale tot op de p-as dan lees je inderdaad af p=25.

In deze interpretatie hebben we dus **dezelfde grafiek** gebruikt voor zowel de vraagfunctie als de inverse vraagfunctie. In het ene geval is p de onafhankelijk veranderlijke en bepalen we q als de afhankelijk veranderlijke via $q = D(p)$. In het andere geval is q de onafhankelijke veranderlijke en p de afhankelijk veranderlijke volgens: $p = D^{-1}(q)$.

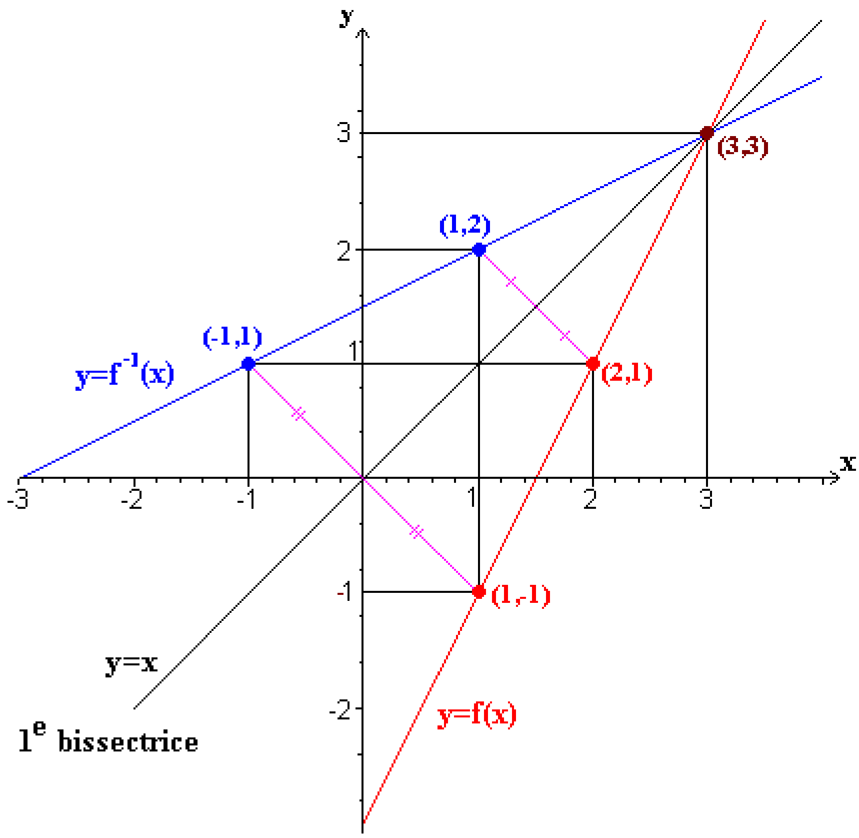
Tweede interpretatie van de inverse functie van een functie:

De grafiek van een functie *f* met voorschrift $y = f(x)$ ontstaat door alle punten $(x, y) = (x, f(x))$ voor te stellen in een assenstelsel.
De inverse relatie van *f* ontstaat nu door de koppels van *f* om te draaien: Als (x, y) een koppel is van f dan zal (y, x) een koppel zijn van f^{-1}.

Voorbeelden:

1. $y = f(x) = 2x - 3$

Het koppel (2,1) bepaalt een punt dat tot *f* behoort want $1 = f(2)$. Bijgevolg is het koppel (1,2) een koppel van de inverse relatie f^{-1}. Op analoge manier geeft het koppel (1,-1) van *f* aanleiding tot het koppel (-1,1) van f^{-1}. Het koppel (3,3) is blijkbaar een gemeenschappelijk punt van f en f^{-1}. Laat ons dit eens bekijken op een grafiek:



Blijkbaar liggen de punten van **de grafiek van f^{-1} en de grafiek van *f* symmetrisch t.o.v. de 1ste bissectrice** (dit is de rechte met vergelijking $y = x$). Dit geldt altijd!

Hoe komen we nu aan het voorschrift van de inverse relatie?

$y = f(x) = 2x - 3$ oplossen naar *x* geeft: $x = \dfrac{y+3}{2}$.

Blijkbaar is f injectief dus is de inverse relatie terug een functie. Om het voorschrift van de inverse functie te vinden moeten we de koppels omdraaien, d.w.z. we moeten in de vorige uitdrukking x en y van plaats verwisselen, t.t.z. we vervangen x door y en y door x. Het voorschrift van de inverse functie is dus: $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$

2. $f(x) = -x^2 + 5x + 1$

$y = -x^2 + 5x + 1$ oplossen naar x geeft:

$y = -x^2 + 5x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 + y = 0$

Dit is een vkv in *x*: de discriminant is: $D = 25 - 4(-1 + y) = 29 - 4y$

De oplossingen zijn dus: $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{29-4y}}{2} = f^{-1}(y)$ en dit bepaalt de inverse relatie van *f*.

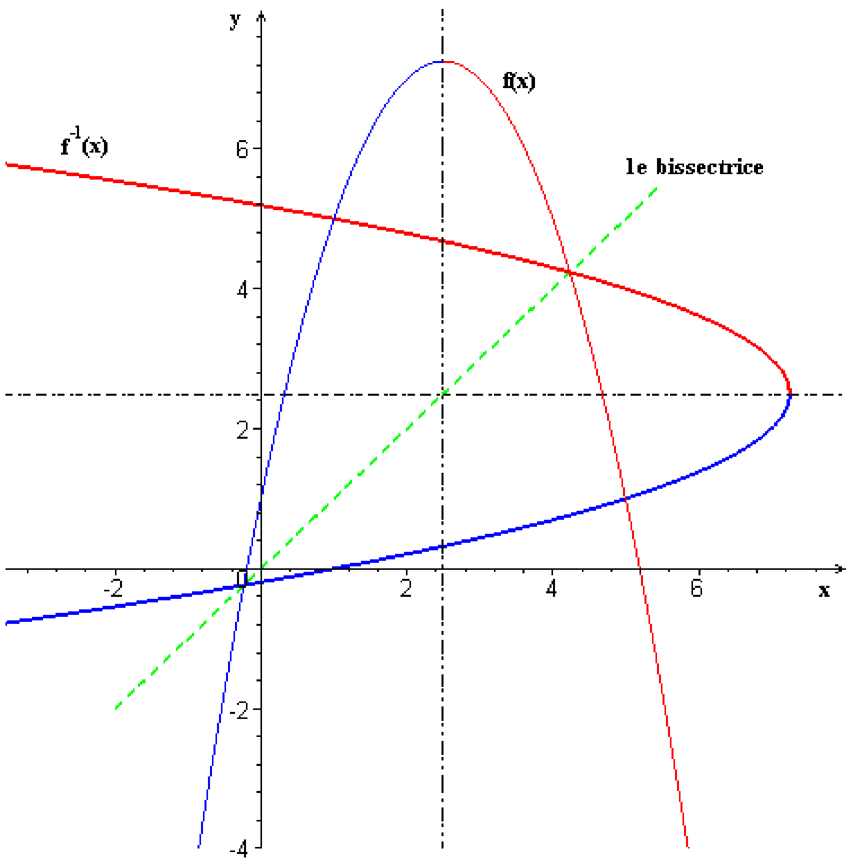
De functie *f* is nu niet injectief want door de aanwezigheid van het +/- teken zijn er *y*-waarden waarmee 2 *x*-waarden corresponderen. Ook grafisch kan je dit makkelijk inzien.

De grafiek van *f* is een bergparabool en je krijgt dus 2 snijpunten als je deze parabool snijdt met een horizontale rechte.

Het voorschrift van de inverse relatie vind je door omdraaien van *x* en *y:*

$$f^{-1}(x) = \frac{5 \pm \sqrt{29-4x}}{2}$$

De grafiek van de inverse relatie vind je door de parabool te spiegelen t.o.v de 1ste bissectrice, dit levert de "liggende" parabool op in volgende figuur:



De gegeven parabool kan je ook opvatten als unie van 2 takken, nl. de tak rechts van de symmetrieas (rood op de grafiek) en de tak links van de symmetrieas (blauw). Als je deze takken afzonderlijk beschouwt dan heb je wel 2 injecties. De inverse van de rode tak van de parabool correspondeert met de rode tak van de “liggende” parabool en dit bepaalt wel een functie, waarvan het voorschrift gegeven is door $f_1^{-1}(x) = \dfrac{5+\sqrt{29-4x}}{2}$. De inverse van de blauwe tak is is de blauwe tak van de “liggende” parabool en is een functie met voorschrift: $f_2^{-1}(x) = \dfrac{5-\sqrt{29-4x}}{2}$.

Eigenschap: Omdat de inverse functie ontstaat door omdraaien van de koppels van de functie, worden ook de begrippen definitiegebied en waardeverzameling omgedraaid. D.w.z.:

$$\boxed{def\,(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)} \quad \text{en} \quad \boxed{\mathrm{Im}(f^{-1}) = def\,(f)}$$