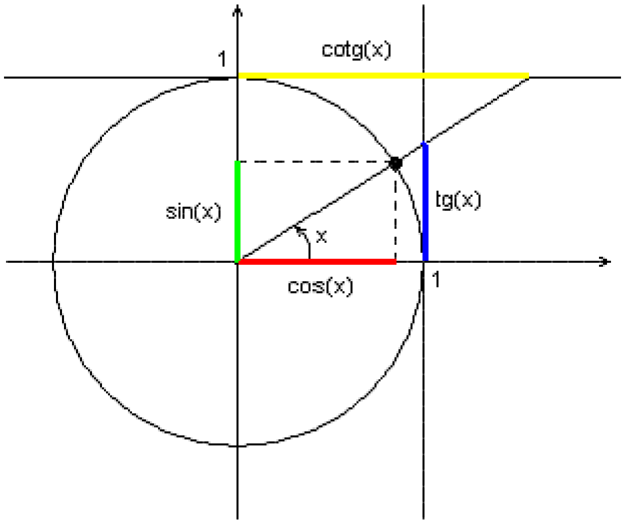
1. Goniometrische getallen: grafische betekenis

Grafische betekenis van de goniometrische getallen op de goniometrische cirkel.



- Basisbetrekking: $\boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}$

- Op deze site vind je een toepassing i.v.m. de betekenis van de goniometrische getallen op de goniometrische cirkel.

2. Goniometrische functies (grafieken zie cyclometrische functies)

Hier vind je een applet die het **verband** illustreert tussen de betekenis van de goniometrische getallen op de **goniometrische cirkel** en de **grafiek** van de corresponderende goniometrische functies.

- $\boxed{y=\sin(x)}$ $\boxed{def(\sin)=R}$, $\boxed{\mathrm{Im}(\sin)=[-1,1]}$, periode $=2\pi$
- $\boxed{y=\cos(x)}$ $\boxed{def(\cos)=R}$, $\boxed{\mathrm{Im}(\cos)=[-1,1]}$, periode $=2\pi$
- $\boxed{y=tg(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}$, periode $=\pi$

  $\boxed{def(tg)=R\setminus\{\text{nulpunten van cos}\}=R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}}$

  $\boxed{\mathrm{Im}(tg)=R}$
- $\boxed{y=\cot g(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}}$, periode $=\pi$

  $\boxed{def(\cot g)=R\setminus\{\text{nulpunten van sin}\}=R\setminus\{k\pi,k\in Z\}}$

  $\boxed{\mathrm{Im}(\cot g)=R}$

- Tekenverloop van de goniometrische functies: Uit de grafische betekenis van de goniometrische functies kan je gemakkelijk volgend tekenverloop afleiden.

x	…	-2π		$-3\pi/2$		$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π	…
$\sin(x)$	…	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	…
$\cos(x)$	…	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	…
$tg(x)$	…	0	+	|	−	0	+	|	−	0	+	|	−	0	+	|	−	0	…
$cotg(x)$	…	|	+	0	−	|	+	0	−	|	+	0	−	|	+	0	−	|	…

- Waardentabel:

	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(x)$	0	−1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	−1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$tg(x)$		|					|		|	
$cotg(x)$	|		|					|		|

Vul verder zelf aan

- Basisbetrekkingen goniometrische vergelijkingen: Door gebruik te maken van de goniometrische cirkel kan je deze makkelijk inzien.

  i. $\boxed{\sin(x) = a = \sin(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + k.2\pi \text{ of } x = \pi - \alpha + k.2\pi\,,\ k \in Z}$
  $\boxed{a \in [-1,1]}$, anders geen oplossing.
  Speciaal geval: $\boxed{\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k.\pi\,,\ k \in Z}$

  ii. $\boxed{\cos(x) = a = \cos(\alpha) \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k.2\pi\,,\ k \in Z}$
  $\boxed{a \in [-1,1]}$, anders geen oplossing.
  Speciaal geval: $\boxed{\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k.\pi\,,\ k \in Z}$

3. Cyclometrische functies = inverse functies van de goniometrische functies

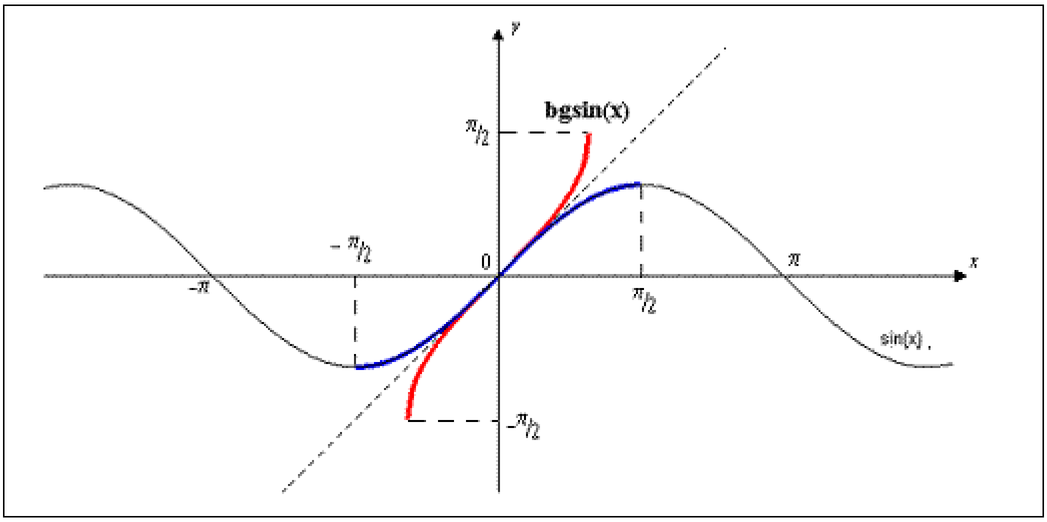
- **bgsin** is de **inverse functie van sin beperkt tot** $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

  M.a.w. als $x \in [-1,1]$ dan is **bgsin(*x*) de hoek *y* in het interval** $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ **waarvan de sinus gelijk is aan *x*.**

  of in formulevorm:

$$\boxed{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{bg}\sin(\boldsymbol{x}) \quad \text{a.s.a.} \quad \boldsymbol{x} = \sin(\boldsymbol{y}) \text{ met } \boldsymbol{y} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$$

$$\boxed{def\,(bg\sin) = [-1,1]}$$
$$\boxed{\mathrm{Im}(bg\sin) = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$$



bgsin en sin zijn mekaars inverse, d.w.z.:

$$\boxed{\forall x \in [-1,1] : \sin(bg\sin(x)) = x}$$
$$\boxed{\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] : bg\sin(\sin(x)) = x}$$

Merk dus op dat als $x \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dan **niet** geldt dat $bg\sin(\sin(x)) = x$

bvb.: $x = \pi$: $bg\sin(\sin(\pi)) = bg\sin(0) = 0 \neq \pi$

- **bgcos** is de **inverse functie van cos beperkt tot** $[0,\pi]$

  M.a.w. als $x \in [-1,1]$ dan is **bgcos(*x*) de hoek *y* in het interval** $[0,\pi]$ **waarvan de cosinus gelijk is aan *x*.**

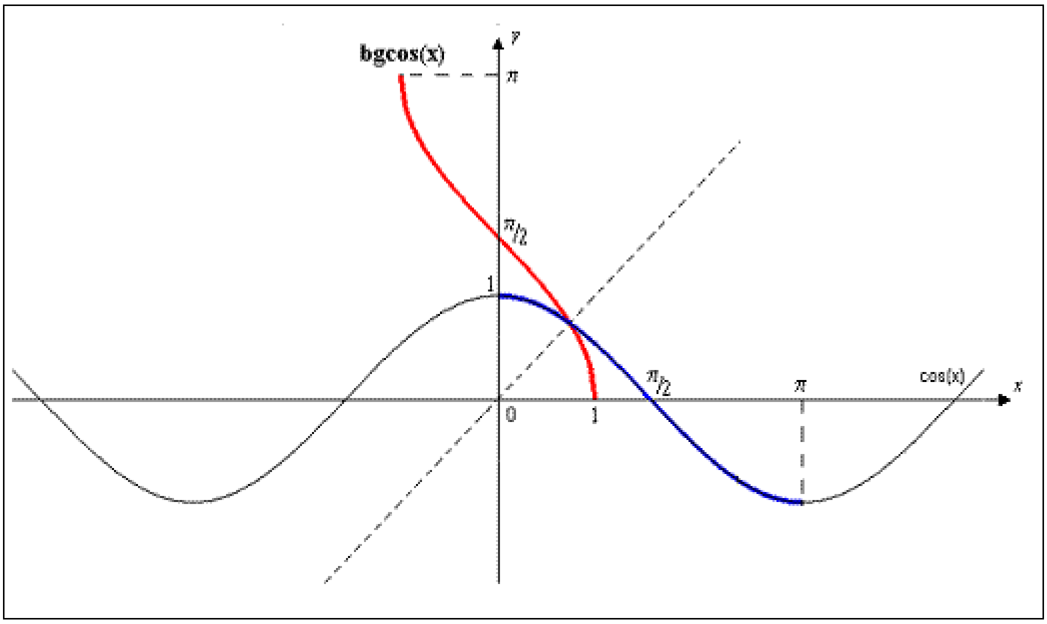
  of in formulevorm:

$$\boxed{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{bg}\cos(\boldsymbol{x}) \quad \text{a.s.a.} \quad \boldsymbol{x} = \cos(\boldsymbol{y})\,\text{met}\ \ \boldsymbol{y} \in [0,\boldsymbol{\pi}]}$$

$$\boxed{def\,(bg\cos) = [-1,1]}$$
$$\boxed{\mathrm{Im}(bg\cos) = [0,\pi]}$$

bgcos en cos zijn mekaars inverse, d.w.z.:

$$\boxed{\forall x \in [-1,1] : \cos(bg\cos(x)) = x}$$
$$\boxed{\forall x \in [0,\pi] : bg\cos(\cos(x)) = x}$$



Een analoge opmerking als hierboven geldt hier ook: als $x \notin [0, \pi]$ dan geldt **niet** dat $bg\cos(\cos(x)) = x$

bvb.: $x = -\pi$: $bg\cos(\cos(-\pi)) = bg\cos(-1) = \pi \neq -\pi$

- bgtg is de inverse functie van tg beperkt tot $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

M.a.w. als $x \in R$ dan is **bgtg(*x*) de hoek *y* in het interval** $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ **waarvan de tg gelijk is aan *x*.**

of in formulevorm:

$$\boxed{y = bgtg(x) \text{ a.s.a. } x = tg(y) \text{ met } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$$

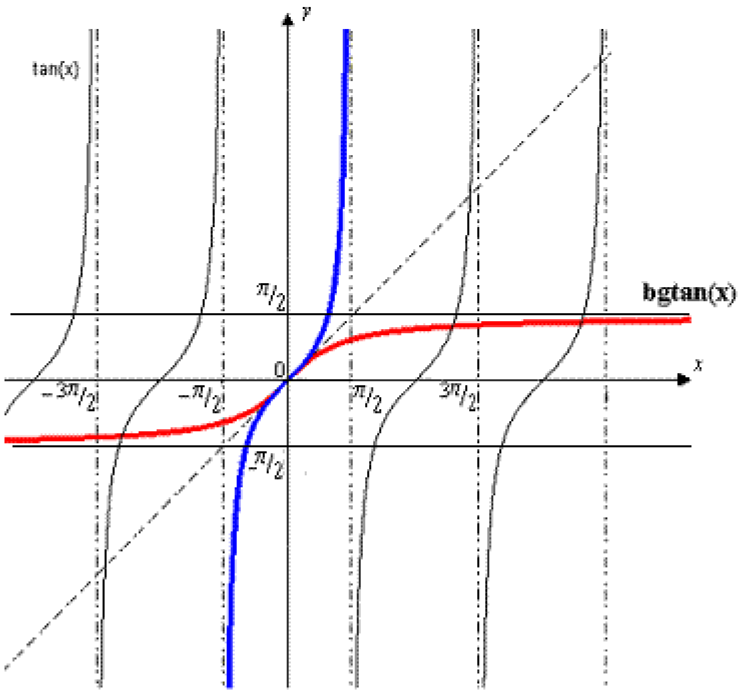
$$\boxed{def(bgtg) = R}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(bgtg) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$$

bgtg en tg zijn mekaars inverse, d.w.z.:

$$\boxed{\forall x \in R : tg(bgtg(x)) = x}$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: bgtg(tg(x)) = x}$$



Zelfde opmerking: als $x \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dan geldt **niet** dat $bgtg(tg(x)) = x$

bvb.: $x = \frac{3\pi}{4}$: $bgtg(tg(\frac{3\pi}{4})) = bgtg(-1) = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}$