## Oefening 4.9 p A.12

Het gebied waar een functie elastisch is wordt bepaald door de volgende voorwaarde:
$f$ is elastisch in $x_0$ a.s.a. de elasticiteit in $x_0$ in absolute waarde groter is dan 1 of nog a.s.a. de elasticiteit ofwel groter is dan 1 ofwel kleiner is dan –1.
In formulevorm: $\left|\frac{Ef}{Ex}(x_0)\right| > 1 \Leftrightarrow \frac{Ef}{Ex}(x_0) > 1$ of $\frac{Ef}{Ex}(x_0) < -1$

(a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

We berekenen dus eerst de elasticiteitsfunctie:

$$\frac{Ef}{Ex}(x) = x\left(\ln(f(x)\right)' = x(\ln(x-1) - \ln(x+1))'$$
$$= x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = x\frac{x+1-x+1}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

De functie is elastisch als $\frac{Ef}{Ex}(x) > 1$ of als $\frac{Ef}{Ex}(x) < -1$. We lossen deze 2 ongelijkheden afzonderlijk op en nemen de **unie** (want er staat of) van de 2 oplossingenverzamelingen.

1^e^) $\frac{Ef}{Ex}(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x - x^2 + 1}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x+1}{x^2-1} > 0$

Oplossen van deze laatste ongelijkheid doen we door van het linkerlid de nulpunten te zoeken van de teller, van de noemer en hiermee de tekentabel op te stellen.

Nulpunten teller: $-x^2 + 2x + 1 = 0$, $D = 4 + 4 = 8$, dus: $x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$

Nulpunten noemer: $x = \pm 1$

Tekenverloop: $1 - \sqrt{2} \approx -0.4$, $1 + \sqrt{2} \approx 2.4$

| $x$ | | -1 | | $1-\sqrt{2}$ | | 1 | | $1+\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+2x+1$ | - | | - | 0 | + | | + | 0 | - |
| $x^2-1$ | + | 0 | - | | - | 0 | + | | + |
| $\frac{-x^2+2x+1}{x^2-1}$ | - | \| | + | 0 | - | \| | + | 0 | - |

Uit deze tabel volgt dat $\frac{-x^2+2x+1}{x^2-1} > 0$ a.s.a. $x \in \left]-1, 1-\sqrt{2}\right[ \cup \left]1, 1+\sqrt{2}\right[$

2^e^) $\frac{Ef}{Ex}(x) < -1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-1} < -1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2-1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} < 0$

Nulpunten teller: $x^2 + 2x - 1 = 0$, $D = 4 + 4 = 8$, dus: $x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Nulpunten noemer: $x = \pm 1$

Tekenverloop: $-1+\sqrt{2} \approx 0.4,\ \ -1-\sqrt{2} \approx -2.4$

| $x$ | | $-1-\sqrt{2}$ | | -1 | | $-1+\sqrt{2}$ | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+2x-1$ | + | 0 | - | | - | 0 | + | | + |
| $x^2-1$ | + | | + | 0 | - | | - | 0 | + |
| $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}$ | + | 0 | - | \| | + | 0 | - | \| | + |

En dus is $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1} < 0$ a.s.a. $x \in \left]-1-\sqrt{2},-1\right[ \cup \left]-1+\sqrt{2},1\right[$

Unie van de 2 oplossingenverzamelingen geeft dus:

de functie *f* is elastisch voor $x \in \left]-1-\sqrt{2},-1\right[ \cup \left]-1,1-\sqrt{2}\right[ \cup \left]-1+\sqrt{2},1\right[ \cup \left]1,1+\sqrt{2}\right[$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

$$\frac{Ef}{Ex}(x) = x\left(\ln(f(x))\right)' = x(-\ln(x^2-4))'$$

$$= -x\left(\frac{2x}{x^2-4}\right) = -\frac{2x^2}{x^2-4}$$

De functie is elastisch als $\dfrac{Ef}{Ex}(x) > 1$ of als $\dfrac{Ef}{Ex}(x) < -1$.

1^e^) $\dfrac{Ef}{Ex}(x) > 1 \Leftrightarrow -\dfrac{2x^2}{x^2-4} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{x^2-4} + 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-4}{x^2-4} < 0$

Nulpunten teller: $x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} \approx \pm 1.15$

Nulpunten noemer: $x = \pm 2$

| $x$ | | -2 | | $-\sqrt{\frac{4}{3}}$ | | $\sqrt{\frac{4}{3}}$ | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2-4$ | + | | + | 0 | - | 0 | + | | + |
| $x^2-4$ | + | 0 | - | | - | | - | 0 | + |
| $\dfrac{3x^2-4}{x^2-4}$ | + | \| | - | 0 | + | 0 | - | \| | + |

Dus is $\dfrac{3x^2-4}{x^2-4} < 0$ a.s.a. $x \in \left]-2,-\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right[ \cup \left]\sqrt{\dfrac{4}{3}},2\right[$

2^e^) $\dfrac{Ef}{Ex}(x) < -1 \Leftrightarrow -\dfrac{2x^2}{x^2-4} < -1 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{x^2-4} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+4}{x^2-4} > 0$

Nulpunten teller: geen
Nulpunten noemer: $x = \pm 2$

| $x$ | -2 2 |
|---|---|
| $x^2+4$ | + + + |
| $x^2-4$ | + 0 - 0 + |
| $\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ | + \| - \| + |

En dus is $\dfrac{x^2+4}{x^2-4} > 0$ a.s.a. $x \in \left]-\infty, -2\right[ \cup \left]2, +\infty\right[$

Unie van de 2 oplossingenverzamelingen geeft:

de functie *f* is elastisch voor $x \in \left]-\infty, -2\right[ \cup \left]-2, -\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right[ \cup \left]\sqrt{\dfrac{4}{3}}, 2\right[ \cup \left]2, +\infty\right[$