Oefening 4.2. p A.10 – A.11

(b) $f(x) = tg^2(e^{-3x})$

Dit is een samengestelde functie. Dus moeten we de kettingregel toepassen om deze functie af te leiden. Hierbij moeten we dus eerst de “buitenste” functie, t.t.z. de functie die we als laatste toepassen, afleiden en dit vermenigvuldigen met de afgeleide van de “binnenste” functie.

Hoe kunnen we nu weten wat de buitenste functie is?

De samenstellende componenten vind je door je af te vragen welke achtereenvolgende berekeningen je moet maken om vertrekkende van een getal *x* tot de uiteindelijke functiewaarde te komen. Laten we dat eens doen voor deze functie.

Vertrekkende van *x* moeten we eerst $-3x$ berekenen, dan e^{-3x}, gevolgd door de *tg* hiervan: $tg(e^{-3x})$ en uiteindelijk dit nog kwadrateren $f(x) = tg^2(e^{-3x}) = (tg(e^{-3x}))^2$.

Schematisch kan je dit als volgt noteren:

$x \mapsto -3x \mapsto e^{-3x} \mapsto tg(e^{-3x}) \mapsto (tg(e^{-3x}))^2$.

De buitenste functie is dus nemen van het kwadraat. Dit moeten we dus eerst afleiden, zodat:

$$f'(x) = D(tg^2(e^{-3x})) = D(tg(e^{-3x}))^2 = 2tg(e^{-3x})D(tg(e^{-3x}))$$

Voor de resterende afgeleide is nu *tg* de buitenste functie , dus wordt dit verder (want $Dtg(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$) : $f'(x) = 2tg(e^{-3x})\dfrac{1}{\cos^2(e^{-3x})}D(e^{-3x})$

En dan ($De^x = e^x$):

$$f'(x) = 2tg(e^{-3x})\frac{1}{\cos^2(e^{-3x})}e^{-3x}D(-3x) = 2tg(e^{-3x})\frac{1}{\cos^2(e^{-3x})}e^{-3x}(-3)$$

De laatste stap is deze uitkomst nog een beetje te vereenvoudigen. Gebruik makend van de definitie van *tg* kunnen we dit nog schrijven als:

$$f'(x) = -6\frac{\sin(e^{-3x})}{\cos^3(e^{-3x})}e^{-3x}$$

(c) $f(x) = \log_5(x^3 + x^2)^6$

Het samenstellende schema ziet er nu als volgt uit:

$x \mapsto x^3 + x^2 \mapsto (x^3 + x^2)^6 \mapsto \log_5(x^3 + x^2)^6$

Hiermee wordt de afgeleide ($D\log_5(x) = \dfrac{1}{\ln(5)}\dfrac{1}{x}$) :

$$f'(x) = D\left(\log_5(x^3 + x^2)^6\right) = \frac{1}{\ln(5)}\frac{1}{(x^3 + x^2)^6}D\left((x^3 + x^2)^6\right) = \frac{1}{\ln(5)}\frac{6(x^3 + x^2)^5 D(x^3 + x^2)}{(x^3 + x^2)^6}$$

$$= \frac{1}{\ln(5)}\frac{6(3x^2 + 2x)}{x^3 + x^2}$$

Alternatief:

als je eerst het voorschrift herschrijft als $f(x) = 6\log_5(x^3 + x^2)$ (Waarom kan je dit alweer?), dan bekom je:

$$f'(x) = 6D\left(\log_5(x^3 + x^2)\right) = 6\frac{1}{\ln(5)}\frac{1}{(x^3 + x^2)}D(x^3 + x^2) = \frac{6}{\ln(5)}\frac{(3x^2 + 2x)}{x^3 + x^2}$$

(d) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2-1})$

Stel nu zelf, indien nog nodig, het schema op.

$$f'(x)=D\left(\ln(\sqrt{x^2-1})\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}D\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{D(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x}{2(x^2-1)}=\frac{x}{x^2-1}$$

alternatief:

$$f(x)=\ln(x^2-1)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

Dus: $f'(x)=\frac{1}{2}D\ln(x^2-1)=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x}{x^2-1}$

(e) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

$$f'(x)=D\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}D(x+\sqrt{x^2+a^2})=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}(1+\frac{D(x^2+a^2)}{2\sqrt{x^2+a^2}})=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}})$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

(f) $f(x)=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)=\frac{1}{2a}(\ln(a+x)-\ln(a-x))$

$$f'(x)=\frac{1}{2a}(\frac{1}{a+x}D(a+x)-\frac{1}{a-x}D(a-x))=\frac{1}{2a}(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x})=\frac{1}{2a}(\frac{a-x+a+x}{a^2-x^2})=\frac{1}{a^2-x^2}$$

Indien je het voorschrift niet vereenvoudigt kom je ook tot het juiste resultaat maar dit zal meer rekenwerk (met meer kans op fouten) vergen.

(h) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))$

Dit is dus de functie uit (f) met $a=1$.

(l) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

$$f'(x)=2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)D\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

De 2de factor is de afgeleide van een breuk. Dus moeten we de rekenregel voor afgeleide van een breuk gaan toepassen:

$$f'(x) = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) D\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2\frac{x+1}{x-1}\frac{(x-1)D(x+1)-(x+1)D(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= 2\frac{x+1}{x-1}\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = -4\frac{x+1}{x-1}\frac{1}{(x-1)^2} = -4\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

(m) $f(x) = a^x x^a$

Deze functie is het product van de 2 functies a^x en x^a. We passen dus de rekenregel toe voor afgeleide van een product:

$$f'(x) = Da^x \cdot x^a + a^x \cdot Dx^a = a^x \ln(a) \cdot x^a + a^x \cdot ax^{a-1} = a^x x^a \ln(a) + a^{x+1} x^{a-1}$$

$$= a^x x^{a-1}(x\ln(a) + a)$$

(n) $f(x) = x^{x^2}$

Dit is een exponentiele functie waar de veranderlijke zowel optreedt in het grondtal als in de exponent. De aangewezen methode om deze functie af te leiden is dus gebruik maken van de logaritmische afgeleide. In de theorie vind je reeds een aantal uitgewerkte voorbeelden.

De ln nemen geeft :

$$\ln f(x) = \ln(x^{x^2}) = x^2 \ln(x)$$

Nu dit afleiden geeft (afgeleide van een product):

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = Dx^2 \cdot \ln(x) + x^2 \cdot D\ln(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln(x)+1)$$

Zodat uiteindelijk

$$f'(x) = f(x) \cdot x(2\ln(x)+1) = x^{x^2} \cdot x(2\ln(x)+1) = x^{x^2+1}(2\ln(x)+1)$$

(o) $f(x) = (3x^2+5)^{e^{x^2}+x}$

Deze functie is van het zelfde type als bij (n) dus moeten we ook via de logaritmische afgeleide te werk gaan:

$$\ln f(x) = (e^{x^2}+x)\ln(3x^2+5)$$

dus(afgeleide van een product):

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = D(e^{x^2}+x) \cdot \ln(3x^2+5) + (e^{x^2}+x) \cdot D\ln(3x^2+5)$$

$$= (e^{x^2}Dx^2+1) \cdot \ln(3x^2+5) + (e^{x^2}+x) \cdot \frac{D(3x^2+5)}{3x^2+5}$$

$$= (2xe^{x^2}+1) \cdot \ln(3x^2+5) + (e^{x^2}+x) \cdot \frac{6x}{3x^2+5}$$

Dus:

$$f'(x) = (3x^2+5)^{e^{x^2}+x}\left[(2xe^{x^2}+1) \cdot \ln(3x^2+5) + (e^{x^2}+x) \cdot \frac{6x}{3x^2+5}\right]$$

$$= (2xe^{x^2}+1) \cdot \ln(3x^2+5)(3x^2+5)^{e^{x^2}+x} + 6x(e^{x^2}+x)(3x^2+5)^{e^{x^2}+x-1}$$

(p) $f(x)=25^{3x^2-6}$

Dit is een exponentiele functie waarbij de veranderlijke niet optreedt in het grondtal. De kettingregel toepassen geeft onmiddellijk het resultaat:

$$f'(x)=D(25^{3x^2-6})=25^{3x^2-6}\ln(25)D(3x^2-6)=6\ln(25)x25^{3x^2-6}$$

(q) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{(x+2)^5}}{\sqrt{(x+3)^5}}$

Dit is een functie die opgebouwd is als een product en quotiënt van allerlei machten en machtswortels. Voor dit soort functie is ook de techniek van de logaritmische afgeleide aangewezen. Dus eerst:

$$\ln f(x)=\ln\left(\frac{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{(x+2)^5}}{\sqrt{(x+3)^5}}\right)=\ln(\sqrt{x-1})+\ln(\sqrt[3]{(x+2)^5})-\ln(\sqrt{(x+3)^5})$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{5}{3}\ln(x+2)-\frac{5}{2}\ln(x+3)$$

En dan afleiden:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{5}{3}\frac{1}{x+2}-\frac{5}{2}\frac{1}{x+3}$$

Zodat:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{(x+2)^5}}{\sqrt{(x+3)^5}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{5}{3}\frac{1}{x+2}-\frac{5}{2}\frac{1}{x+3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{(x+2)^5}}{\sqrt{(x+3)^5}}\frac{3(x+2)(x+3)+10(x-1)(x+3)-15(x-1)(x+2)}{6(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{6\sqrt{x-1}\sqrt{(x+3)^7}}(-2x^2+20x+18)$$

$$=\frac{-(x^2-10x-9)\sqrt[3]{(x+2)^2}}{3\sqrt{x-1}\sqrt{(x+3)^7}}$$

(r) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

$$\ln f(x)=\frac{1}{2}\ln(1-x^2)-\frac{2}{3}\ln(x+1)$$

Dus:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\frac{-2x}{1-x^2}-\frac{2}{3}\frac{1}{x+1}=\frac{-3x-2(1-x)}{3(1-x)(x+1)}=\frac{-x-2}{3(1-x)(x+1)}$$

en:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{(1-x)(x+1)}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\frac{-(x+2)}{3(1-x)(x+1)}=\frac{-(x+2)}{3\sqrt{1-x}(x+1)^{1+2/3-1/2}}=\frac{-(x+2)}{3\sqrt{1-x}(x+1)^{\frac{7}{6}}}$$

(t) $f(x) = \log_2\left(\sqrt{\cos^2(2x)+4}\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(\cos^2(2x)+4\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\ln(2)}\frac{D(\cos^2(2x)+4)}{\cos^2(2x)+4} = \frac{1}{2\ln(2)}\frac{2\cos(2x)(-\sin(2x))(2)}{\cos^2(2x)+4}$$

$$= \frac{-1}{\ln(2)}\frac{2\sin(2x)\cos(2x)}{\cos^2(2x)+4} = \frac{-\sin(4x)}{\ln(2)(\cos^2(2x)+4)}$$