Oefening 12 p A.12-A.13

In deze oefening is het de bedoeling dat de regel van de l'Hopital gebruikt wordt bij de berekening van de limieten. Merk op dat je deze regel enkel kan gebruiken als de beschouwde limiet leidt tot een onbepaaldheid van de vorm $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$. Soms zal je de gegeven limiet dus moeten omvormen tot een van deze vormen.
Niet vergeten van eerst na te kijken of je wel een onbepaaldheid hebt!

Regel van de l'Hopital: $\lim \frac{\text{teller}}{\text{noemer}} = \lim \frac{\text{afgeleide van de teller}}{\text{afgeleide van de noemer}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2}$

$x=0$ invullen geeft : $\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$ dus een onbepaaldheid van de juiste vorm om de regel van de l'Hopital toe te passen (we duiden dit aan door een letter H te plaatsen boven het gelijkheidsteken):

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x}$

$x=0$ invullen geeft terug : $\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$, dus moeten we nog eens de regel toepassen:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right)$

Invullen geeft: $\frac{1}{\ln(1)} - \frac{1}{0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \pm\infty - (\pm\infty)$.

Om te weten of dit een onbepaaldheid is moet we het teken kennen van ∞. Hiertoe moeten we onderscheid maken tussen de linker en de rechterlimiet:

LL: $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{\ln(1^-)} - \frac{1}{0^-} = \frac{1}{0^-} - (-\infty) = -\infty + \infty = \text{onbepaald}$

(links van 1 is $\ln(x)$ inderdaad negatief zoals je o.a. kan zien op de grafiek)

RL: $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{\ln(1^+)} - \frac{1}{0^+} = \frac{1}{0^+} - (+\infty) = +\infty - \infty = \text{onbepaald}$

In beide gevallen krijgen we dus een onbepaaldheid. Deze zijn niet van de gewenste vorm om de l'Hopital te kunnen toepassen dus moeten we de limiet eerst omvormen:

$\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)} = \frac{1-1-0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0}$

En deze onbepaaldheid is wel van de gewenste vorm:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln(x)+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln(x)+x-1}=\frac{0}{0}$$

nogmaals de l'Hopital:

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln(x)+x\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln(x)+2}=\frac{1}{2}$$

Merk op dat we hier nu geen onderscheid moeten maken hebben tussen linker- en rechterlimiet.

(g) $\lim_{x\to 0}\left(tg^2(x)\right)^{\sin(x)}=\left(0\right)^0=0^0=\text{onbepaald}$

Bij dit type limiet, de limiet van een veralgemeende exponentiële functie (de veranderlijke treedt zowel op in grondtal als in de exponent) die tot een onbepaalde vorm leidt, moeten we als volgt te werk gaan.

1^e : Bereken de limiet van de ln van de functie:

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[\left(tg^2(x)\right)^{\sin(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\sin(x)\ln tg^2(x)=0\cdot\ln(0^+)=0\cdot(-\infty)=\text{onbepaald}$$

Dit is niet van het gewenste type dus moeten we dit eerst nog omvormen:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln tg^2(x)}{\frac{1}{\sin(x)}}=\frac{-\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{-\infty}{\infty}$$

en dit is een onbepaaldheid die wel van de goede vorm is om de l'Hopital te kunnen toepassen:

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{tg^2(x)}2tg(x)\frac{1}{\cos^2(x)}}{-\frac{1}{\sin^2(x)}\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2(x)}{tg(x)\cos^3(x)}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}=-2\frac{0}{1}=0$$

2^e : De oorspronkelijke limiet vinden we dan door e tot de in 1^e gevonden waarde te verheffen.

$$\lim_{x\to 0}\left(tg^2(x)\right)^{\sin(x)}=e^0=1$$

(h) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x\sin(2x)}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$

We kunnen de regel van de l'Hopital toepassen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)\cdot 3}{\sin(2x)+x\cos(2x)\cdot 2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)+2x\cos(2x)}=3\frac{0}{0+0}=\frac{0}{0}$$

Dus nogmaals toepassen:

$$\overset{H}{=}3\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)}{2\cos(2x)+2(\cos(2x)-2x\sin(2x))}$$

$$=9\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)}{4\cos(2x)-4x\sin(2x)}=9\frac{1}{4-0}=\frac{9}{4}$$

(j) $\lim_{x\to 0}\frac{2-3e^{2x}+e^{6x}}{4x^2}=\frac{2-3+1}{0}=\frac{0}{0}$

$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-6e^{2x}+6e^{6x}}{8x}=\frac{-6+6}{0}=\frac{0}{0}$

$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-12e^{2x}+36e^{6x}}{8}=\frac{-12+36}{8}=3$

(k) $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}=1^{\infty}=\text{onbepaald}$

We gebruiken dezelfde techniek als in oefening (g):

1^{e} : limiet van de ln berekenen:

$\lim_{x\to 1}\ln\left((2-x)^{\frac{1}{x-1}}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\ln(2-x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x-1}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x-1}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2-x}(-1)}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2-x}=-1$

2^{e} : oorspronkelijke limiet $=e^{\text{uitkomst } 1^{e}\text{stap}}$:

$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$

(l) $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{\lambda x}-1)}{e^{\mu x}-1-\mu x}=\frac{0(1-1)}{1-1-0}=\frac{0}{0}=\text{onbepaald}$

$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\lambda x}-1)+xe^{\lambda x}\lambda}{e^{\mu x}\mu-\mu}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\lambda x}-1+\lambda xe^{\lambda x}}{\mu(e^{\mu x}-1)}=\frac{1}{\mu}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x}-1}{e^{\mu x}-1}=\frac{1}{\mu}\frac{1+0-1}{1-1}=\frac{0}{0}$

$\overset{H}{=}\frac{1}{\mu}\lim_{x\to 0}\frac{\lambda e^{\lambda x}+\lambda(e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x})}{\mu e^{\mu x}}=\frac{1}{\mu^2}\lim_{x\to 0}\frac{2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2xe^{\lambda x}}{e^{\mu x}}=\frac{1}{\mu^2}\frac{2\lambda+0}{1}=\frac{2\lambda}{\mu^2}$

(o) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{x}{3}}=1^{\infty}=\text{onbepaald}$

Zelfde techniek als in (g) en (k):

$1^{e}:\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}\infty\cdot 0=\text{onbepaald}$

omvormen naar de gewenste vorm:

$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}\frac{0}{0}=\frac{0}{0}$

$\overset{H}{=}\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(\frac{-2}{x^3})}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^3+x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^3}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$

(hierbij hebben we gebruik gemaakt van de vuistregel: $\lim\limits_{x\to\infty}$ (rationale functie) = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{HGTT}{HGTN}$)

2e : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{x}{3}} = e^0 = 1$

(p) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(2-x^2)^{tg(\frac{\pi x}{2})} = 1^{-\infty} = \text{onbepaald}$

(Omdat als $\underset{>}{x \to 1}$ dan $\dfrac{\pi x}{2} \underset{>}{\to} \dfrac{\pi}{2}$ is inderdaad: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} tg(\dfrac{\pi x}{2}) = -\infty$)

Steeds dezelfde methode:

1e : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\ln\left((2-x^2)^{tg(\frac{\pi x}{2})}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} tg(\dfrac{\pi x}{2})\ln\left(2-x^2\right) = -\infty\cdot 0 = \text{onbepaald}$

Omvormen:

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{\sin(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})}\ln\left(2-x^2\right) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\sin(\frac{\pi x}{2})\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{\ln\left(2-x^2\right)}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = 1\cdot\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{\ln\left(2-x^2\right)}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{\frac{1}{2-x^2}(-2x)}{-\sin(\frac{\pi x}{2})\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{x}{(2-x^2)\sin(\frac{\pi x}{2})} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1\cdot 1} = \frac{4}{\pi}$$

2e : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(2-x^2)^{tg(\frac{\pi x}{2})} = e^{\frac{4}{\pi}}$