Oef 3 p A.8

Al de functies in deze oefeningen zijn ofwel algebraïsche functies of zijn de samenstelling van een algebraïsche functie en een transcendente functie. Uit Stelling 3.6 volgt dat alle algebraïsche functies continu zijn op hun definitiegebied. De in de cursus geziene transcendente functies zijn ook continu op hun definitiegebied. (zie p 57 ev.) zodat uit stelling 3.7 volgt dat samenstellingen van transcendente en algebraïsche functies eveneens continu zijn op hun definitiegebied. Het komt er dus in deze oefening essentieel op neer om het definitiegebied van de functie te bepalen.

(b) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$

- $def(f)$:

  Voorwaarde: $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \Rightarrow def(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- De functie is continu op $def(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- limiet in de randpunten: de randpunten zijn $+\infty,-\infty,1$

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x}=1$

  $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{3}{0}=\infty$

  Om het teken te bepalen moeten we onderscheid maken tussen LL en RL.

  $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

  $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-x-2}$

- $def(f)$:

  Voorwaarde: $x^2-x-2\neq 0$

  Nulpunten van x^2-x-2: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}=\left\langle \begin{array}{l}2\\-1\end{array}\right.$

  $\Rightarrow def(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$
- De functie is continu op $def(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$
- limiet in de randpunten: de randpunten zijn $+\infty,-\infty,-1,2$

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

  $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4}{x^2-x-2}=\dfrac{5}{0}=\infty$

  - $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\dfrac{x^2+4}{x^2-x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\dfrac{x^2+4}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{5}{0^+(-3)}=-\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x^2+4}{x^2-x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x^2+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{5}{0^-(-3)} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+4}{x^2-x-2} = \frac{8}{0} = \infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x^2+4}{x^2-x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x^2+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{5}{3 \cdot 0^+} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^2+4}{x^2-x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^2+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{5}{3 \cdot 0^-} = -\infty$