Oef 2 p A.7

(b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

Omdat het gedrag op $+\infty$ en op $-\infty$ totaal anders is voor een exponentiele functie moeten we zeker onderscheid maken tussen beide.

1e : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

Als we $+\infty$ invullen bekomen we $(2/3)^{-\infty}$. Omdat $2/3<1$ is dit gelijk aan $+\infty$. (zie grafiek van exponentiele met $a<1$)

2e : $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

Als we $-\infty$ invullen bekomen we $(2/3)^{+\infty}$. Omdat $2/3<1$ is dit gelijk aan 0. (zie grafiek van exponentiele met $a<1$)

Conclusie: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=0$

Alternatief: Herschrijf de opgave als $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$. Dit is dan de limiet op oneindig van een exponentiele functie met grondtal >1. Het resultaat staat letterlijk in de cursus. (p57 (3.55) en (3.56))

(c) $\lim_{x\to a}\frac{ax+10}{x}$

Eerste stap: de waarde invullen!

$$\lim_{x\to a}\frac{ax+10}{x}=\frac{a^2+10}{a}$$

Dit is een reëel getal en dus gelijk aan de limiet tenzij $a=0$ want dan bestaat deze uitdrukking niet. Vandaar dat we het geval $a=0$ afzonderlijk moeten behandelen. We krijgen dan:

$$\lim_{x\to0}\frac{10}{x}=\frac{10}{0}=\pm\infty$$

Onderscheid tussen linker en rechter limiet dringt zich nu op:

$$\lim_{\substack{x\to0\\ >}}\frac{10}{x}=\frac{10}{0^+}=+\infty,\lim_{\substack{x\to0\\ <}}\frac{10}{x}=\frac{10}{0^-}=-\infty$$

(f) $\lim_{t\to2}\frac{t^2-6t+8}{t^2-5t+6}$

$t=2$ invullen geeft: $\frac{4-12+8}{4-10+6}=\frac{0}{0}$ en dit is een onbepaaldheid. Omdat we nu zowel in de teller als in de noemer 0 bekomen betekent dit dat 2 voor beide veeltermen een nulpunt is of nog dat beide veeltermen deelbaar zijn door de factor $t-2$. De respectievelijke quotiënten kan je via Horner berekenen of op het zicht:

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^2-6t+8}{t^2-5t+6}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t-4)}{(t-2)(t-3)}$$

De gemeenschappelijke factor wegdelen en opnieuw $t=2$ invullen geeft:

$$=\lim_{t\to 2}\frac{\cancel{(t-2)}\,(t-4)}{\cancel{(t-2)}\,(t-3)}=\lim_{t\to 2}\frac{t-4}{t-3}=\frac{-2}{-1}=2$$

(g) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$

$x=-1$ invullen geeft: $\frac{1+1-2}{1+2-3}=\frac{0}{0}$ = ONBEP. Omdat we nu zowel in de teller als in de noemer 0 bekomen betekent dit dat -1 voor beide veeltermen een nulpunt is of nog dat beide veeltermen deelbaar zijn door de factor $x+1$:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}\,(x-2)}{\cancel{(x+1)}\,(x-3)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x-3}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{2-e^x}{e^{1/x}}=\frac{2-1}{e^{1/0}}=\frac{1}{e^{\infty}}$

Voor de bepaling van de noemer is het teken van ∞ belangrijk. Vandaar dat we moeten onderscheid maken tussen de linker en de rechterlimiet.

RL : $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{2-e^x}{e^{1/x}}=\frac{1}{e^{1/0^+}}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$

LL: $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{2-e^x}{e^{1/x}}=\frac{1}{e^{1/0^-}}=\frac{1}{e^{-\infty}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ (Waarom 0^+ ? Bekijk nog eens de grafiek van de exponentiele functie)

(j) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=\frac{1}{1+2^{1/0}}=\frac{1}{1+2^{\infty}}$

We moeten terug onderscheid maken tussen LL en RL:

RL: $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{1+2^{1/x}}=\frac{1}{1+2^{1/0^+}}=\frac{1}{1+2^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$

LL: $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{1+2^{1/x}}=\frac{1}{1+2^{1/0^-}}=\frac{1}{1+2^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1$

(k) $\lim_{h\to -1}\frac{e^{-h}}{h^3+4h+5}=\frac{e^1}{-1-4+5}=\frac{e}{0}=\infty$

Om het teken te bepalen moeten we onderscheid maken tussen LL en RL. In de noemer kunnen we een factor $h+1$ voorop plaatsen (omdat we 0 bekomen).

RL: $\lim_{\substack{h\to -1\\ >}}\frac{e^{-h}}{h^3+4h+5}=\lim_{\substack{h\to -1\\ >}}\frac{e^{-h}}{(h+1)(h^2-h+5)}=\frac{e}{0^+(1+1+5)}=+\infty$

LL: $\lim_{\substack{h\to -1\\ <}}\frac{e^{-h}}{h^3+4h+5}=\lim_{\substack{h\to -1\\ <}}\frac{e^{-h}}{(h+1)(h^2-h+5)}=\frac{e}{0^-(1+1+5)}=-\infty$

(l) $\lim\limits_{h\to\infty}\frac{1+e^{1/h}}{e^h}=\frac{1+e^{1/\infty}}{e^\infty}=\frac{1+e^0}{e^\infty}=\frac{2}{e^\infty}$

Op dit punt moeten we onderscheid maken tussen + en - ∞:

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{1+e^{1/h}}{e^h}=\frac{2}{e^{+\infty}}=\frac{2}{+\infty}=0$$
$$\lim_{h\to-\infty}\frac{1+e^{1/h}}{e^h}=\frac{2}{e^{-\infty}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

(m) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^4+6x^3-2x^2-x+1}{5x^6+6x^2+1}$

Hier zijn de volgende vuistregels van toepassing:

Limiet op **oneindig** van een **veelterm** = limiet op oneindig van de **hoogste graadsterm** van de veelterm.

Limiet op **oneindig** van een **rationale functie** = limiet op oneindig van **hoogste graadsterm van de teller / hoogste graadsterm van de noemer.**

Kort geschreven: $\lim\limits_{x\to\infty}$(rationale functie) = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{HGTT}{HGTN}$

Let op: deze vuistregels gelden enkel voor de limieten op oneindig !!!!

Toegepast voor deze oefening:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^4+6x^3-2x^2-x+1}{5x^6+6x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^4}{5x^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{5x^2}=\frac{-3}{+\infty}=0^-$$

(n) Zelfde vuistregel:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+6x^2-1}{-2x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{2}$$

En nu moeten we onderscheid maken tussen + en - ∞:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+6x^2-1}{-2x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{2}=\frac{-5(+\infty)}{2}=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+6x^2-1}{-2x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x}{2}=\frac{-5(-\infty)}{2}=+\infty$$

(o) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+6x^2+2x-1}{x^3-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}5=5$

(q) $\lim\limits_{x\to\infty}\exp\left(\frac{5x^3+6x^2-1}{-2x^2+2}\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+6x^2-1}{-2x^2+2}\right)$

Deze laatste limiet bereken je met de vuistregel. We nemen het resultaat over van (n)

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{5x^3+6x^2-1}{-2x^2+2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+6x^2-1}{-2x^2+2}\right) = \exp(-\infty) = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \exp\left(\frac{5x^3+6x^2-1}{-2x^2+2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3+6x^2-1}{-2x^2+2}\right) = \exp(+\infty) = e^{+\infty} = +\infty$$

(r) $\lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{5x^3+6x^2+2x-1}{x^3-3}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+6x^2+2x-1}{x^3-3}\right) = \exp(5) = e^5$

Waarbij we het resultaat van (o) gebruikt hebben.

(t) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{4}-2}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{ONBEP}$

Het feit dat we terug in teller en noemer 0 bekomen houdt in dat we opnieuw een factor $x-1$ zullen kunnen voorop stellen. Om hiertoe te komen echter moeten we een trucje gebruiken. Deze truc wordt altijd gebruikt als je een onbepaaldheid hebt bij een limiet van een rationale functie.

De truc is: **vermenigvuldig teller en noemer met de toegevoegde wortelvorm(en).**

Wat is de toegevoegde wortelvorm? Dit is een uitdrukking die ervoor zorgt dat de wortels verdwijnen. Het is gebaseerd op het merkwaardig product:

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

Hier toegepast: De toegevoegde wortelvorm van de teller $\sqrt{x+3}-2$ is $\sqrt{x+3}+2$ want als we beide vermenigvuldigen verdwijnt inderdaad de wortel:

$(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2) = \left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 2^2 = x+3-4 = x-1$

Analoog is de toegevoegde wortelvorm van de noemer $\sqrt{x}+1$

Verdere uitwerking geeft:

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{x-1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}$$

(v) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-3}}{x-1}$

Rekening houdend met onze vuistregel bekomen we:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-3}}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x^2}}{x}$$

Omdat $\sqrt{x^2} = x$ als $x \geq 0$ en $\sqrt{x^2} = -x$ als $x < 0$ moeten we onderscheid maken tussen + en -∞ :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-3}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-3}}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (-2) = -2$$

(w) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-x+2}}{x}$

Volledig analoog als (v):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

(x) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)$

Via de vuistregel krijg je: $+\infty-(\pm\infty)$, wat ons onmiddellijk verplicht om onderscheid te maken tussen + en -∞.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right) = +\infty-(-\infty) = +\infty+\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right) = +\infty-(+\infty) = \text{ONBEP}$$

Om deze onbepaaldheid op te heffen moeten zoals bij oef (t) teller en noemer vermenigvuldigen met de toegevoegde wortelvorm.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)\frac{\sqrt{x^2-2x+3}+x}{\sqrt{x^2-2x+3}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+3-x^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+x} = -1$$

Hierbij hebben we weer de vuistregel aangewend: limiet op ∞ van een veelterm wordt volledig bepaald door de hoogste graadsterm en ook van $\sqrt{x^2}=x$ als $x\geq 0$.

(z) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}\right)$

Je bekomt:

in $+\infty$: $\sqrt[3]{+\infty}-\sqrt[3]{+\infty} = +\infty-(+\infty) = \text{ONBEP}$

in $-\infty$: $\sqrt[3]{-\infty}-\sqrt[3]{-\infty} = -\infty-(-\infty) = -\infty+\infty = \text{ONBEP}$

In beide gevallen onbepaald dus.

Om deze onbepaaldheid weg te werken passen we weer hetzelfde trucje toe: we vermenigvuldigen teller en noemer met de toegevoegde wortelvorm van $\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}$.

Omdat we hier 3[e]-machtwortels hebben is dit niet zomaar $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}$. De vermenigvuldiging werkt inderdaad niet de wortels weg.

Wat is dan wel de toegevoegde wortelvorm? Daarvoor moeten we eens kijken naar het merkwaardig product voor 3[e]-machten: $a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$

De toegevoegde wortelvorm van $\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}$ is dus: $\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$.

Hiermee kunnen we nu de limiet berekenen:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x}\right)\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-1-x}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt[3]{+\infty} + \sqrt[3]{\pm\infty}\sqrt[3]{\pm\infty} + \sqrt[3]{+\infty}} = \frac{-1}{+\infty + \infty + \infty} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

(aa) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x(x-3)} = \frac{4-4}{0(-3)} = \frac{0}{0} = \text{ONBEP}$$

Vermenigvuldigen met toegevoegde wortelvorm!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x(x-3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+16}-4}{x(x-3)} \frac{\sqrt{x+16}+4}{\sqrt{x+16}+4} = \lim_{x\to 0} \frac{x+16-16}{x(x-3)(\sqrt{x+16}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(x-3)(\sqrt{x+16}+4)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x-3)(\sqrt{x+16}+4)} = \frac{1}{-3(4+4)} = -\frac{1}{24}$$

(bb) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x(x+1)} = \frac{3-3}{0(1)} = \frac{0}{0} = \text{ONBEP}$$

Vermenigvuldigen met toegevoegde wortelvorm!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x(x+1)} \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} = \lim_{x\to 0} \frac{x+9-9}{x(x+1)(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{1(3+3)} = \frac{1}{6}$$