Bepaal het definitiegebied en de waardeverzameling van de volgende functies. Zijn de functies bijectief? Zoneen, hoe kan je ze bijectief maken?

1. $f(x) = bg\sin(\sqrt{x^2 - 3x + 2})$

1) Definitiegebied

Voorwaarden:

i. Wat onder de wortel staat moet positief zijn: $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
Bepaal het tekenverloop van het linkerlid:

x	1 2
$x^2 - 3x + 2$	+ 0 - 0 +

De oplossingenverzameling van $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ is dus: $]-\infty,1] \cup [2,+\infty[$

ii. $def(bg\sin) = [-1,1]$ dus moet: $-1 \leq \sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq 1$
Deze dubbele ongelijkheid splitst op in 2 afzonderlijke ongelijkheden:
nl. $-1 \leq \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ welke voor alle x voldaan is want een vierkantwortel is steeds positief dus zeker groter dan –1.
en: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 0$
Tekenverloop van het linkerlid:
$D = 3^2 - 4.1.1 = 5$, nulpunten: $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (omdat $2 < \sqrt{5} < 3$ ligt dit tussen 0 en 0.5 en dus <1) en $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (ligt tussen 2.5 en 3 en dus >2)

x	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$x^2 - 3x + 1$	+ 0 - 0 +

De oplossingenverzameling van $x^2 - 3x + 1 \leq 0$ is dus $\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Besluit: Doorsnede van de 2 oplossingenverzamelingen geeft:
$$def(f) = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \cup \left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$$

2) Waardeverzameling:

Inverse relatie bepalen: $y = bg\sin(\sqrt{x^2 - 3x + 2})$ oplossen naar x.
$y = bg\sin(\sqrt{x^2 - 3x + 2}) \Rightarrow \sin(y) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ en $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ want $\mathrm{Im}(bg\sin) = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Kwadrateren geeft: $\sin^2(y) = x^2 - 3x + 2$ met K.V.W: $\sin(y) \geq 0$
Breng alles in 1 lid: $x^2 - 3x + 2 - \sin^2(y) = 0$, dit is een v.k.v in x:
$D = 9 - 4(2 - \sin^2(y)) = 1 + 4\sin^2(y)$

Oplossingen: $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{1+4\sin^2(y)}}{2} = f^{-1}(y)$. Dit is de inverse relatie van *f*.
Definitiegebied van deze inverse relatie:
Voorwaarde: $1+4\sin^2(y) \geq 0$ is altijd voldaan want het LL is een som van positieve getallen.
De waardeverzameling vinden we dus door combinatie van de voorwaarden:
$y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ en $\sin(y) \geq 0$. Dit geeft: $\operatorname{Im}(f) = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

3) Bijectief?

Door de aanwezigheid van +/- in het voorschrift van de inverse relatie hebben we voor elke y-waarde 2 x-waarden en is de functie dus niet bijectief.

Je kan de functie bijectief maken door de functie te beperken tot een deel van het definitiegebied. En dit op 2 manieren, namelijk als volgt:

1) Als je bij de inverse relatie enkel het + teken neemt, dus de functie $x = \dfrac{3+\sqrt{1+4\sin^2(y)}}{2} = f_1^{-1}(y)$ dan volgt hieruit dat $x \geq 2$. Als we dus de het definitiegebied van de functie *f* beperken tot het interval $\left[2, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ dan krijgen we een bijectie(want voor elke y maar 1 x):

$$f_1(x) = bg\sin(\sqrt{x^2-3x+2}) \text{ en } f_1^{-1}(y) = \frac{3+\sqrt{1+4\sin^2(y)}}{2}$$

tussen $def(f_1) = \left[2, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ en $\operatorname{Im}(f) = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

2) Als je bij de inverse relatie enkel het - teken neemt, dus de functie $x = \dfrac{3-\sqrt{1+4\sin^2(y)}}{2} = f_2^{-1}(y)$ dan volgt hieruit dat $x \leq 1$. Als we dus de het definitiegebied van de functie *f* beperken tot het interval $\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right]$ dan krijgen we een andere bijectie:

$$f_2(x) = bg\sin(\sqrt{x^2-3x+2}) \text{ en } f_2^{-1}(y) = \frac{3-\sqrt{1+4\sin^2(y)}}{2}$$

tussen $def(f_2) = \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right]$ en $\operatorname{Im}(f) = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

2. $f(x) = 2^{-x^2+1}$

1) Definitiegebied

Voorwaarden:
- Een veeltermfunctie is gedefinieerd voor elk reëel getal, dus hier geen voorwaarde.
- $def(\exp_2) = \mathbb{R}$ dus ook geen voorwaarde voor de exponentiele.

Besluit: $def(f) = \mathbb{R}$

2) Waardeverzameling

Inverse relatie bepalen: $y = 2^{-x^2+1}$ oplossen naar *x*.

$y = 2^{-x^2+1} \Rightarrow \log_2(y) = -x^2 + 1$ en $y \in \left]0,+\infty\right[$ (want $\mathrm{Im}(\exp_2) = \left]0,+\infty\right[$)

$\Rightarrow x^2 = 1 - \log_2(y) \Rightarrow x = \pm\sqrt{1-\log_2(y)} = f^{-1}(y)$

Van deze inverse relatie bepalen we nu het definitiegebied:
Voorwaarden:
- $def(\log_2) = \left]0,+\infty\right[\Rightarrow y > 0$
- $1 - \log_2(y) \geq 0 \Leftrightarrow \log_2(y) \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 2^1 = 2$

De doorsnede van alle voorwaarden samen geeft dus als waardeverzameling:

$\mathrm{Im}(f) = \left]0,2\right]$

3) Bijectief?

Door de aanwezigheid van +/- in het voorschrift van de inverse relatie hebben we voor elke y-waarde 2 x-waarden en is de functie dus niet bijectief.

Je kan de functie bijectief maken door de functie te beperken tot een deel van het definitiegebied. En dit op 2 manieren, namelijk als volgt:

1) Als je bij de inverse relatie enkel het + teken neemt, dus de functie $x = \sqrt{1-\log_2(y)} = f_1^{-1}(y)$ dan volgt hieruit dat $x \geq 0$. Als we dus de oorspronkelijke functie beperken tot de positieve getallen dan krijgen we een bijectie(want voor elke y maar 1 x):

$f_1(x) = 2^{-x^2+1}$ en $f_1^{-1}(y) = \sqrt{1-\log_2(y)}$ tussen $def(f_1) = \left[0,+\infty\right]$ en $\mathrm{Im}(f) = \left]0,2\right]$

2) Als je bij de inverse relatie enkel het - teken neemt, dus de functie $x = -\sqrt{1-\log_2(y)} = f_2^{-1}(y)$ dan volgt hieruit dat $x \leq 0$. Als we dus de oorspronkelijke functie beperken tot de negatieve getallen dan krijgen we een 2[de] bijectie:

$f_2(x) = 2^{-x^2+1}$ en $f_2^{-1}(y) = -\sqrt{1-\log_2(y)}$ tussen $def(f_2) = \left[-\infty,0\right]$ en $\mathrm{Im}(f) = \left]0,2\right]$

3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

1) Definitiegebied

Voorwaarden:
- Noemers verschillend van 0 dus: $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$
- $def(\ln) =]0,+\infty[\Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1} > 0$

Bepaal het tekenverloop van het linkerlid:

x	-1 1
$\dfrac{x-1}{x+1}$	+ | - 0 +

De gebieden waar de voorwaarde $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ voldaan is, zijn dus $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
Samen met de eerste voorwaarde geeft dit:
$def(f) =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

2) Waardeverzameling

Inverse relatie bepalen: $y = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ oplossen naar *x*.

$y = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \Rightarrow e^y = \dfrac{x-1}{x+1}$ ($\mathrm{Im}(\ln) = \mathbb{R}$ dus geen voorwaarde stellen)

$\Rightarrow e^y(x+1) = x-1 \Leftrightarrow x(1-e^y) = 1+e^y$, en dus is de inverse relatie:

$x = \dfrac{1+e^y}{1-e^y} = f^{-1}(y)$

Van deze inverse relatie bepalen we het definitiegebied:
Voorwaarde: $1-e^y \neq 0 \Leftrightarrow e^y \neq 1 \Leftrightarrow y \neq 0$
De waardenverzameling is dus : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

3) Bijectief

Omdat je bij de inverse relatie voor elke y-waarde maar 1 x-waarde hebt is deze inverse relatie een functie en is de oorspronkelijke functie een bijectie tussen $def(f) =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ en $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.