Oef 9 p A.4

(b) Gegeven: $f_2(x) = \sqrt{x+1}$

1. def(f)

   Voorwaarde: $x+1 \geq 0$ (de uitdrukking onder een vkwortel mag niet negatief zijn)

   Dit leidt onmiddellijk tot: $def\,(f_2) = [-1,+\infty[$

2. Im(f)

   inverse relatie: Los de vgl $y = \sqrt{x+1}$ op naar *x*:
   $y = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow y^2 = x+1 \Leftrightarrow x = f_2^{-1}(y) = y^2 - 1$
   Bij de eerste overgang moeten we een kwadrateringsvoorwaarde stellen: $y \geq 0$.
   De inverse relatie $f_2^{-1}(y) = y^2 - 1$ is gedefinieerd voor elk reëel getal. Rekening houdend met de kwadrateringsvoorwaarde krijgen we: $\mathrm{Im}(f_2) = \mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$

3. bijectief?

   De inverse relatie $f_2^{-1}(y) = y^2 - 1$ is een functie (want met elke *y* correspondeert maar 1 *x*). De gegeven functie is dus een bijectie tussen $def\,(f_2) = [-1,+\infty[$ en $\mathrm{Im}(f_2) = \mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$.

(d) Gegeven: $f_4(x) = \log_3(x^4 - 3)$

1. def(f)

   Voorwaarde: omdat $def\,(\log_3) =]0,+\infty[$ moet: $x^4 - 3 > 0$.
   Uitwerking: De nulpunten van $x^4 - 3$: $x^4 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}$
   Tekentabel:

x		$-\sqrt[4]{3}$		$\sqrt[4]{3}$	
$x^4 - 3$	+	0	-	0	+

   De oplossing van de ongelijkheid $x^4 - 3 > 0$ wordt dus gegeven door:
   $def\,(f_4) =]-\infty,-\sqrt[4]{3}[\cup]\sqrt[4]{3},+\infty[$

2. Im(f)

   $y = \log_3(x^4 - 3) \Leftrightarrow 3^y = x^4 - 3 \Leftrightarrow x^4 = 3^y + 3 \Leftrightarrow x = f_4^{-1}(y) = \pm\sqrt[4]{3^y + 3}$
   Omdat $\mathrm{Im}(\log_3) = \mathbb{R}$ en de inverse relatie gedefinieerd is voor elke $\mathbb{R}$ (ga dit zelf na) is: $\mathrm{Im}(f_4) = \mathbb{R}$

3. bijectief?

De inverse relatie $f_4^{-1}(y) = \pm\sqrt[4]{3^y + 3}$ is **geen functie** (want met elke *y* corresponderen 2 *x*-waarde*n*). De gegeven functie is dus geen bijectie.
We kunnen er wel een bijectie van maken door de functie op te splitsen:
Kijk naar het voorschrift van de inverse relatie: het + teken geeft aanleiding tot *x*-waarden die positief zijn (zelfs $\geq \sqrt[4]{3}$), het - teken tot *x*-waarden die negatief zijn (zelfs $\leq -\sqrt[4]{3}$). Kijk nu naar het definitiegebied dit bestaat uit 2 delen corresponderend met de respectievelijke bovenstaande gevallen. Door het definitiegebied op te splitsen kunnen we 2 bijecties construeren:

1ste bijectie: $f_{4,1} : \left]\sqrt[4]{3}, +\infty\right[\to \mathbb{R} : x \mapsto \log_3(x^4 - 3)$
met dus als inverse functie: $f_{4,1}^{-1}(y) = \sqrt[4]{3^y + 3}$

2de bijectie: $f_{4,2} : \left]-\infty, -\sqrt[4]{3}\right[\to \mathbb{R} : x \mapsto \log_3(x^4 - 3)$
met dus als inverse functie: $f_{4,2}^{-1}(y) = -\sqrt[4]{3^y + 3}$