Oef 5 pA.3

Gegeven: $f(x) = (2x+1)t + x^2 + 6x$, waarbij t een reele parameter is.

Om de vragen te beantwoorden moeten we eerst het functievoorschrift herschikken volgens de machten van *x*:

$$f(x) = x^2 + (2t+6)x + t = x^2 + 2(t+3)x + t$$

In alle 3 de onderdelen van de vraag beschouwen we de vergelijking $f(x) = -3$.
We werken deze vergelijking eerst uit:

$$x^2 + 2(t+3)x + t = -3 \Leftrightarrow x^2 + 2(t+3)x + t + 3 = 0 \ (1.1)$$

Dit is een vierkantsvergelijking in *x*. Deze kan ofwel 1, ofwel geen, ofwel 2 verschillende oplossingen hebben. Dit wordt bepaald door de discriminant van de vergelijking welke dan respectievelijk voldoet aan $D = 0, D < 0, D > 0$

(a) er bestaat juist 1 oplossing van $f(x) = -3$ als de vergelijking (1.1) 1 oplossing heeft.
De voorwaarde hiervoor is: $D = 0$
Werk deze voorwaarde uit:
$D = b^2 - 4ac = 4(t+3)^2 - 4.1.(t+3) = 4(t+3)(t+3-1) = 4(t+3)(t+2) = 0$
$\Leftrightarrow t = -2$ of $t = -3$
De oplossing wordt dan gegeven door : $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2(t+3)}{2} = -(t+3)$
voor $t = -2$ wordt dit $x = -1$
voor $t = -3$ wordt dit $x = 0$

(een alternatief om deze oplossing te vinden is gewoon de vgl (1.1) te herschrijven voor de respectievelijke *t*-waarden. Voor $t = -2$ wordt dit $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$, voor $t = -3$ $x^2 = 0$, hieruit volgt onmiddellijk de oplossing)

(b) er bestaat geen enkele oplossing van $f(x) = -3$ als de vergelijking (1.1) geen oplossingen heeft. De voorwaarde hiervoor is: $D < 0$
Uitwerking geeft:
$D = 4(t+3)(t+2) < 0$
Via de tekentabel van $D = 4(t+3)(t+2)$ kunnen we deze ongelijkheid oplossen.

t		-3		-2	
$D = 4(t+3)(t+2)$	+	0	-	0	+

De oplossingverzameling van $D = 4(t+3)(t+2) < 0$ is dus : $t \in \left]-3,-2\right[$.

(c) er bestaan 2 verschillende oplossingen van $f(x) = -3$ als de vergelijking (1.1) 2 verschillende oplossingen heeft. De voorwaarde hiervoor is: $D > 0$
Uitwerking geeft:
$D = 4(t+3)(t+2) > 0$
Via dezelfde tekentabel levert dit: $t \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]-2,+\infty\right[$.
De 2 verschillende oplossingen die bij een *t*-waarde horen die hieraan voldoet vinden we via de algemene formule:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2(t+3) \pm \sqrt{4(t+2)(t+3)}}{2} = -(t+3) \pm \sqrt{(t+2)(t+3)}$$