Oef 1 pA.3.

$V=\{a,b,c,d\}, W=\{a,e,f\}$
Gegeven de relaties van V naar W:
$R_1=\{(a,a),(b,a),(c,f),(d,e)\}$
$R_2=\{(a,e),(d,a),(b,f)\}$

Fris eerst nog eens de theorie op ivm relaties, functies, afbeeldingen, …klik hier of hier

1[e]) R_1 is een functie van V naar W want elk element van V heeft ten hoogste 1 beeld.
Elk element heeft zelfs juist 1 beeld dus is R_1 ook een afbeelding.
R_1 is ook surjectief want elk element van W treedt op als beeld.
R_1 is niet injectief want *a* treedt 2x op als beeld (in *a* komen 2 pijlen toe)
2[e]) R_2 is een functie van V naar W want elk element van V heeft ten hoogste 1 beeld
c heeft geen beeld dus is R_2 geen afbeelding
R_2 is wel een surjectie want elk element van W komt voor als beeld.
R_2 is injectief want elk element van W treedt hoogstens 1x op als beeld (in elk element komt hoogstens 1 pijl toe)
3[e]) R_1^{-1}: Om de vragen te kunnen beantwoorden moeten we eerst de koppels van R_1^{-1} bepalen. Deze vinden we door de koppels van R_1 om te draaien:
$R_1^{-1}=\{(a,a),(a,b),(f,c),(e,d)\}$
Dit is **geen** functie van W naar V want *a* heeft 2 beelden. Als onmiddellijk gevolg kan het dan ook geen afbeelding, injectie en surjectie zijn.
4[e]) $R_2^{-1}=\{(e,a),(a,d),(f,b)\}$
Dit is een functie van W naar V want elk element van W heeft ten hoogste 1 beeld.
Dit is een afbeelding van W naar V want elk element van W heeft juist 1 beeld.
Dit is geen surjectie want het element *c* van V komt niet voor als beeld.
Het is wel een injectie want elk element van V komt ten hoogste 1 keer voor als beeld.

Extra vragen:

- Bepaal de samenstelling $R_1 \circ R_2^{-1}$. Tussen welke verzamelingen is dit een relatie? Bepaal definitiegebied en waardeverzameling van deze relatie. Is het een functie, afbeelding, surjectie, injectie?
- Zelfde vragen voor $R_1^{-1} \circ R_2$.

Oplossing:

- $R_1 \circ R_2^{-1}$: R_2^{-1} is een relatie van *W* naar *V*, R_1 een relatie van *V* naar *W* dus is $R_1 \circ R_2^{-1}$ (lees R_1 **na** R_2^{-1}) een relatie van *W* naar *W*. De koppels ervan vinden we door de koppels van R_2^{-1} en R_1 te combineren zoals uitgelegd in de theorie.

R_2^{-1}	R_1	Resulterend koppel $R_1 \circ R_2^{-1}$
(e,a)	*(a,a)*	*(e,a)*
(a,d)	*(d,e)*	*(a,e)*
(f,b)	*(b,a)*	*(f,a)*

Het koppel (c, f) R_1 van wordt niet gebruikt want *c* treedt niet op als beeld van R_2^{-1}.

Dus: $R_1 \circ R_2^{-1} = \{(e,a),(a,e),(f,a)\}$

Waaruit onmiddellijk volgt:

$def(R_1 \circ R_2^{-1}) = \{e,a,f\} = W$

$\mathrm{Im}(R_1 \circ R_2^{-1}) = \{a,e\}$

$R_1 \circ R_2^{-1}$ is een functie en een afbeelding want elk element van *W* heeft juist 1 beeld.

$R_1 \circ R_2^{-1}$ is geen surjectie want het element *f* van *W* treedt niet op als beeld.

$R_1 \circ R_2^{-1}$ is geen injectie want *a* treedt 2x op als beeld.

- $R_1^{-1} \circ R_2$: R_2 is een relatie van *V* naar *W*, R_1^{-1} een relatie van *W* naar *V* dus is $R_1^{-1} \circ R_2$ (lees R_1^{-1} **na** R_2) een relatie van *V* naar *V*. De koppels ervan vinden we door de koppels van R_2 en R_1^{-1} te combineren zoals uitgelegd in de theorie.

R_2	R_1^{-1}	Resulterend koppel $R_1^{-1} \circ R_2$
(a,e)	*(e,d)*	*(a,d)*
(d,a)	*(a,a)*	*(d,a)*
(d,a)	*(a,b)*	*(d,b)*
(b,f)	*(f,c)*	*(b,c)*

Het koppel (d,a) van R_1 wordt 2x gebruikt omdat *a* onder R_1^{-1} 2 beelden heeft.

Dus: $R_1^{-1} \circ R_2 = \{(a,d),(d,a),(d,b),(b,c)\}$

Waaruit onmiddellijk volgt:

$def(R_1^{-1} \circ R_2) = \{a,b,d\}$

$\mathrm{Im}(R_1^{-1} \circ R_2) = \{a,b,c,d\}$

$R_1 \circ R_2^{-1}$ is geen functie en dus ook geen afbeelding, surjectie of injectie want *d* heeft 2 beelden.