<u>Oef 11 p A.5</u>

(c) $f_3(x) = bg\cos(x^2 - 7x + 6)$

1. def(f) :

voorwaarden: Omdat $def(bg\cos) = [-1,1]$ moeten we als voorwaarden stellen:

$-1 \leq x^2 - 7x + 6 \leq 1$

Dit moeten we opsplitsen in 2 ongelijkheden die we afzonderlijk oplossen.

$1^e: -1 \leq x^2 - 7x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 7 \geq 0$

nulpunten van $x^2 - 7x + 7$: $D = 49 - 28 = 21$

$$x_1 = \frac{7-\sqrt{21}}{2} (\approx 1.21), x_2 = \frac{7+\sqrt{21}}{2} (\approx 5.79)$$

tekentabel:

x		x_1		x_2	
$x^2 - 7x + 7$	+	0	-	0	+

Oplossing: $x \in \left]-\infty, \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right[$

(let op: randpunten inbegrepen want $\geq$-teken.)

$2^e: x^2 - 7x + 6 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 5 \leq 0$

nulpunten van $x^2 - 7x + 5$: $D = 49 - 20 = 29$

$$x_3 = \frac{7-\sqrt{29}}{2} (\approx 0.81), x_4 = \frac{7+\sqrt{29}}{2} (\approx 6.19)$$

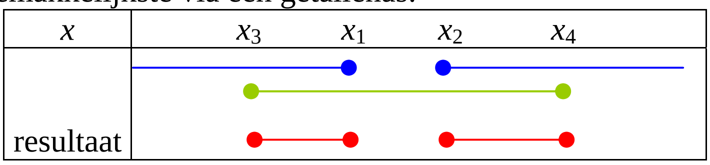
tekentabel:

x		x_3		x_4	
$x^2 - 7x + 5$	+	0	-	0	+

Oplossing: $x \in \left[\frac{7-\sqrt{29}}{2}, \frac{7+\sqrt{29}}{2}\right]$

(let op: randpunten inbegrepen want $\leq$-teken.)

Het definitiegebied vinden we als doorsnede van deze 2 oplossingenverzamelingen. Dit gaat het gemakkelijkste via een getallenas:



Conclusie: $def(f_3) = \left[\frac{7-\sqrt{29}}{2}, \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{21}}{2}, \frac{7+\sqrt{29}}{2}\right]$

2. Im(f)

Inverse relatie: $y = bg\cos(x^2 - 7x + 6) \Leftrightarrow \cos(y) = x^2 - 7x + 6$

Omdat $\mathrm{Im}(bg\cos) = [0, \pi]$ moeten we bij deze overgang als voorwaarde stellen:

$y \in [0, \pi]$

verder: $\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 - \cos(y) = 0$

Dit is een vierkantsvergelijking in *x*, die we oplossen op de gewone manier:

$D = 49 - 4(6 - \cos(y)) = 25 + 4\cos(y)$

oplossingen: $x = f_3^{-1}(y) = \dfrac{7 \pm \sqrt{25 + 4\cos(y)}}{2}$

Definitiegebied hiervan: voorwaarde: $25 + 4\cos(y) \geq 0$, omdat $-1 \leq \cos(y) \leq 1$ is deze voorwaarde altijd voldaan.

Conclusie: $\mathrm{Im}(f_3) = [0, \pi]$

3. bijectief:

De functie is niet bijectief want de inverse relatie is geen functie (met elke *y* corresponderen 2 *x*-waarden).

Op dezelfde manier als in oefening 9 kan je ook hier het definitiegebied opsplitsen en zo 2 bijecties bekomen.

(d) $f_4(x) = bgtg(x^2 - 8x + 1)$

1. def(f) :

voorwaarden: Omdat een veeltermfunctie overal gedefinieerd is en $def(bgtg) = \mathbb{R}$ moeten we geen voorwaarden stellen en is: $def(f_4) = \mathbb{R}$

2. Im(f)

Inverse relatie: $y = bgtg(x^2 - 8x + 1) \Leftrightarrow tg(y) = x^2 - 8x + 1$

Omdat $\mathrm{Im}(bgtg) = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ moeten we bij deze overgang als voorwaarde stellen:

$y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

verder: $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 - tg(y) = 0$

$D = 64 - 4(1 - tg(y)) = 60 + 4tg(y) = 4(15 + tg(y))$

oplossingen: $x = f_4^{-1}(y) = \dfrac{8 \pm \sqrt{4(15 + tg(y))}}{2} = 4 \pm \sqrt{15 + tg(y)}$

Definitiegebied hiervan: voorwaarde: $15 + tg(y) \geq 0 \Leftrightarrow tg(y) \geq -15 \Leftrightarrow y \geq bgtg(-15)$ (de ongelijkheid blijft bewaard omdat *bgtg* een stijgende functie is). De 2 voorwaarden samen geven:

Conclusie: $\mathrm{Im}(f_4) = \left[bgtg(-15), \dfrac{\pi}{2}\right[$

3. bijectief:

De functie is niet bijectief want de inverse relatie is geen functie (met elke *y* corresponderen 2 *x*-waarden). Door het definitiegebied op te splitsen in 2 stukken, nl. $]-\infty, 4]$ en $[4, +\infty[$ kan je 2 bijecties bekomen. Zie je in vanwaar deze opsplitsing komt?

(e) $f_5(x) = bg\cos(-2x^2 - 3x)$

1. def(f) :

voorwaarden: Omdat $def(bg\cos) = [-1,1]$ moeten we als voorwaarden stellen:

$-1 \le -2x^2 - 3x \le 1$

Dit moeten we opsplitsen in 2 ongelijkheden die we afzonderlijk oplossen.

1^e : $-1 \le -2x^2 - 3x \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 \le 0$

nulpunten van $2x^2 + 3x - 1$: $D = 9 + 4.2 = 17$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} (\approx -1.78), x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} (\approx 0.28)$$

tekentabel:

x	x_1 x_2
$2x^2 + 3x - 1$	+ 0 - 0 +

Oplossing: $x \in \left[\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right]$

(let op: randpunten inbegrepen want $\le$-teken.)

2^e : $-2x^2 - 3x \le 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x+1) \ge 0$

nulpunten $x_3 = -1, x_4 = -\frac{1}{2}$ (deze bekom je natuurlijk ook met de algemene formule)

tekentabel:

x	-1 -1/2
$2x^2 + 3x + 1$	+ 0 - 0 +

Oplossing: $x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Het definitiegebied vinden we als doorsnede van deze 2 oplossingenverzamelingen:

x	x_1 -1 -1/2 x_2
resultaat	

Conclusie: $def(f_5) = \left[\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, -1\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right]$

2. Im(f)

Inverse relatie: $y = bg\cos(-2x^2 - 3x) \Leftrightarrow \cos(y) = -2x^2 - 3x$

Omdat $\mathrm{Im}(bg\cos) = [0, \pi]$ moeten we bij deze overgang als voorwaarde stellen:

$y \in [0, \pi]$

verder: $\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + \cos(y) = 0$

$D = 9 - 8\cos(y)$

oplossingen: $x = f_5^{-1}(y) = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8\cos(y)}}{4}$

Definitiegebied hiervan: voorwaarde: $9-8\cos(y) \geq 0$, omdat $-1 \leq \cos(y) \leq 1$ is $1 \leq 9-8\cos(y) \leq 17$ en is deze voorwaarde altijd voldaan.

Conclusie: $\text{Im}(f_5) = [0, \pi]$

3. bijectief:
De functie is niet bijectief want de inverse relatie is geen functie (met elke *y* corresponderen 2 *x*-waarden).
Het definitiegebied opsplitsen geeft weer aanleiding tot 2 bijecties.

(g) $f_7(x) = \sin(bg\cos(x^2))$

1. def(f) :
voorwaarden:
*) $def(bg\cos) = [-1,1] \Rightarrow$ voorwaarde: $-1 \leq x^2 \leq 1$
1^e : $x^2 \geq -1$ is voldaan voor elk reëel getal.
2^e : $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$
*) $def(\sin) = \mathbb{R}$ dus geen extra voorwaarde.
Conclusie: $def(f_7) = [-1,1]$

2. Im(f)

Inverse relatie: $y = \sin(bg\cos(x^2)) \Leftrightarrow bg\sin(y) = bg\cos(x^2)$
Omdat $\text{Im}(\sin) = [-1,1]$ moeten we bij deze overgang als voorwaarde stellen:
$y \in [-1,1]$
verder: $\Leftrightarrow \cos(bg\sin(y)) = x^2$
Omdat $\text{Im}(bg\cos) = [0,\pi]$ moeten we bij deze overgang als voorwaarde stellen:
$bg\sin(y) \in [0,\pi]$. Bij definitie is $bg\sin(y) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ zodat uit deze voorwaarde volgt: $bg\sin(y) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ en dus $y \in [0,1]$
Ten slotte:: $x = f_7^{-1}(y) = \pm\sqrt{\cos(bg\sin(y))}$
Definitiegebied hiervan: voorwaarde: $\cos(bg\sin(y)) \geq 0$, omdat $bg\sin(y) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ is deze voorwaarde altijd voldaan.
Alle voorwaarden samen geeft: $\text{Im}(f_7) = [0,1]$

3. bijectief:
De functie is niet bijectief want de inverse relatie is geen functie (met elke *y* corresponderen 2 *x*-waarden). Opsplitsen van het definitiegebied in het positieve en negatieve deel geeft aanleiding tot 2 bijecties