Oef 10 pA.4

(d) $f_4(x) = \log_5(x^2 + 2(m+1)x - 2m - 2) = \log_5(x^2 + 2(m+1)x - 2(m+1))$

def(f): Omdat $def(\log_5) =]0, +\infty[$ moeten de *x*-waarden van het definitiegebied voldoen aan de voorwaarde:

$$x^2 + 2(m+1)x - 2(m+1) > 0 \qquad (1.1)$$

De functie in het linkerlid van deze ongelijkheid is een 2^de^ graadsfunctie met coëfficiënt van $x^2 = 1 > 0$. De grafiek is dus een dalparabool (indien nodig kan je dat hier nog even opfrissen) met 3 mogelijke liggingen t.o.v. x-as:
1^ste^ : de parabool ligt volledig boven de x-as, voorwaarde hiervoor is $D < 0$
2^de^: de parabool raakt aan de x-as (maar ligt er voor de rest volledig boven), voorwaarde $D = 0$
3^de^: de parabool heeft 2 snijpunten met de x-as. Links van het kleinste en rechts van het grootste snijpunt ligt de parabool boven de x-as, tussen de snijpunten onder de x-as. Voorwaarde: $D > 0$

We berekenen dus al de discriminant D:
$D = 4(m+1)^2 - 4.1.(-2(m+1)) = 4(m+1)(m+1+2) = 4(m+1)(m+3)$

Nu kunnen we de vragen oplossen:

(i) $def(f) = \mathbb{R}$ als voorwaarde (1.1) voldaan is voor elk reëel getal *x*. M.a.w. als de parabool volledig boven de x-as ligt. Voorwaarde hiertoe is dus $D < 0$.
Via de tekentabel van D kunnen we deze voorwaarde oplossen.

m		-3		-1	
$D = 4(m+1)(m+3)$	+	0	-	0	+

conclusie: $def(f) = \mathbb{R}$ als $m \in]-3, 1[$

(ii) $def(f) = \varnothing$ als voorwaarde (1.1) voldaan is voor geen enkel reëel getal *x*. Of nog $x^2 + 2(m+1)x - 2(m+1) \leq 0$ voor elke *x*. De parabool zou dus rakend aan en voor de rest volledig onder de x-as moeten liggen. Voor een dalparabool kan dit niet. Er zijn dus geen waarden voor m waarvoor $def(f) = \varnothing$.

(iii) De overige waarden van m zijn: $m \in]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$. Hiervoor is $D \geq 0$. De 2^de^ graadsfunctie $x^2 + 2(m+1)x - 2(m+1)$ heeft dan 2 nulpunten (die samenvallen als $D = 0$) die gegeven worden door de algemene formule:

$$x_{1,2} = \frac{-2(m+1) \pm \sqrt{4(m+1)(m+3)}}{2} = -(m+1) \pm \sqrt{(m+1)(m+3)}$$

Links van het kleinste hiervan en rechts van de grootste ligt de parabool boven de x-as.
De voorwaarde (1.1) is dus voldaan voor :
$x \in def(f_4) = \left]-\infty, -(m+1) - \sqrt{(m+1)(m+3)}\right[\cup \left]-(m+1) + \sqrt{(m+1)(m+3)}, +\infty\right[$
(Let op: open intervallen want in de voorwaarde (1.1) staat een strikt ongelijkheidsteken $>$).

(e) $f_5(x) = \sqrt{-x^2 - 2m(x+1) - m + 2} = \sqrt{-x^2 - 2mx - 3m + 2}$

def(f): Omdat de vierkantswortel enkel bestaat voor niet negatieve getallen moeten we de volgende voorwaarde stellen:

$$-x^2 - 2mx - 3m + 2 \geq 0 \; (1.2)$$

De functie in het linkerlid van deze ongelijkheid is een 2de graadsfunctie met coëfficiënt van $x^2 = -1 < 0$. De grafiek is dus een bergparabool (nog even opfrissen) met 3 mogelijke liggingen t.o.v. x-as:
1ste : de parabool ligt volledig onder de x-as, voorwaarde hiervoor is $D < 0$
2de: de parabool raakt aan de x-as (maar ligt er voor de rest volledig onder), voorwaarde $D = 0$
3de: de parabool heeft 2 snijpunten met de x-as. Links van het kleinste en rechts van het grootste snijpunt ligt de parabool onder de x-as, tussen de snijpunten boven de x-as. Voorwaarde: $D > 0$

We hebben zeker de discriminant D nodig:
$D = 4m^2 - 4.(-1).(-3m+2) = 4(m^2 - 3m + 2) = 4(m-1)(m-2)$

Nu kunnen we de vragen oplossen:

(i) $def(f) = \mathbb{R}$ als voorwaarde (1.2) voldaan is voor elk reëel getal *x*. M.a.w. als de bergparabool raakt aan en voor de rest volledig boven de x-as ligt. Voor een bergparabool kan dit niet. Er zijn dus geen waarden voor m waarvoor $def(f) = \mathbb{R}$.

(ii) $def(f) = \varnothing$ als voorwaarde (1.2) voldaan is voor geen enkel reëel getal *x*. Of nog $-x^2 - 2mx - 3m + 2 < 0$ voor elke *x*. De parabool moet dus volledig onder de x-as liggen. Voorwaarde hiertoe is dus $D < 0$.
Via de tekentabel van D kunnen we deze voorwaarde oplossen.

m		1		2	
$D = 4(m-1)(m-2)$	+	0	-	0	+

conclusie: $def(f) = \varnothing$ als $m \in \left]1, 2\right[$

(iii) De overige waarden van m zijn: $m \in \left]-\infty, 1\right] \cup \left[2, +\infty\right[$. Hiervoor is $D \geq 0$. De 2de graadsfunctie $-x^2 - 2mx - 3m + 2$ heeft dan 2 nulpunten (die samenvallen als $D = 0$) die gegeven worden door de algemene formule:

$$x_{1,2} = \frac{+2m \pm \sqrt{4(m-1)(m-2)}}{-2} = -m \pm \sqrt{(m-1)(m-2)}$$

Tussen de 2 nulpunten ligt de bergparabool boven de x-as. De voorwaarde (1.2) is dus voldaan voor : $x \in def(f_5) = \left[-m - \sqrt{(m-1)(m-2)}, -m + \sqrt{(m-1)(m-2)}\right]$
(Let op: gesloten interval want in de voorwaarde (1.2) staat een groter of gelijk aan teken).