Exponentiele verdeling (pag. 101-103)

- De kansveranderlijke heeft een exponentiele verdeling als de kansdichtheid de volgende vorm heeft:
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
De veranderlijke kan enkel positieve waarden aannemen.
- De parameter λ is een strikt positief getal.

- De grafiek van de kansdichtheid heeft volgende kenmerken (zie figuur 7.2 pag. 102):
  - Links van 0 is de kansdichtheid 0.
  - Voor $x = 0$ is $f_X(0) = \lambda$, het snijpunt met de Y-as bepaalt dus de parameter.
  - Verder verloopt de kansdichtheid exponentieel dalend naar 0 op $+\infty$.

- Cumulatieve verdelingsfunctie:

  - $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ (grafiek zie figuur 7.2 pag. 102)
  - Uitleg bij de afleiding voor $x \geq 0$:
    $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy$
    Stel hierin nu: $z = -\lambda y$
    Dan is $dz = -\lambda dy \Rightarrow \lambda dy = -dz$
    $y = 0 \Rightarrow z = 0$
    $y = x \Rightarrow z = -\lambda x$
    Dus: $F_X(x) = -\int_0^{-\lambda x} e^z dz = \int_{-\lambda x}^{0} e^z dz = \left[e^z \right]_{-\lambda x}^{0} = e^0 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}$

- Kenmerken:

  - Verwachtingswaarde: $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
    afleiding:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} y\lambda e^{-\lambda y} dy \overset{z=-\lambda y}{=} \frac{1}{\lambda}\int_0^{-\infty} ze^z dz = -\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} ze^z dz = -\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} zd(e^z)$$

$$\overset{PI}{=} -\frac{1}{\lambda}\left(\left[ze^z\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^z dz\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\left((0e^0 - \lim_{z\to-\infty}(ze^z) - \left[e^z\right]_{-\infty}^{0}\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\left(-\lim_{z\to-\infty}\left(\frac{z}{e^{-z}}\right) - (1-0)\right)$$

$$\overset{H}{=} -\frac{1}{\lambda}\left(-\lim_{z\to-\infty}\left(\frac{1}{-e^{-z}}\right) - 1\right) = -\frac{1}{\lambda}(0-1) = \frac{1}{\lambda}$$

- Variantie: $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

  Dit resultaat kan afgeleid worden via een analoge, maar nog langere, berekening als hierboven.

- Kwantielen van orde *p*: $Q_X(p) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)$

  Afleiding: Het kwantiel van orde *p* is bij definitie de waarde *x* zodat:
  $F_X(x) = P(X \le x) = p$
  Uitwerking geeft:
  $1 - e^{-\lambda x} = p \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - p \Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1-p) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)$

- Voorbeeld:

  de tijd tussen 2 opeenvolgende gebeurtenissen is meestal exponentieel verdeeld.
  Stel dat in een supermarkt uit tijdsmetingen blijkt dat de gemiddelde tijd tussen de binnenkomst van 2 opeenvolgende klanten een 0.5 minuut is. Dan is op een willekeurig moment de tijd tussen de binnenkomst van 2 opeenvolgende bezoekers exponentieel verdeeld met parameter $\lambda = \frac{1}{0.50} = 2$.

- Eigenschappen:

  - Verband met de Poissonverdeling

    Als X = het aantal gebeurtenissen per tijdseenheid Poisson verdeeld is met parameter λ dan is de tijd T tussen 2 opeenvolgende gebeurtenissen exponentieel verdeeld met dezelfde parameter λ.
    Dus: $X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow T \sim \exp(\lambda)$

    Voorbeeld: Als het aantal bezoekers dat een supermarkt binnenkomt gedurende een uur Poisson verdeeld is met gemiddelde waarde 120 dan is de tijd tussen de binnenkomst van 2 bezoekers exponentieel verdeeld met parameter 120. De

gemiddelde tijd is dan $\frac{1}{120} uur = \frac{60}{120} \min = 0.5 \min$.
Intuïtief is dit duidelijk: als er gemiddeld 120 op een uur (= 60 min) binnenkomen dat komt er gemiddeld om de 0.5 min een klant binnen.

Uitleg bij het bewijs:
De verdeling van een veranderlijke ligt volledig vast door zijn kansdichtheid of door de cumulatieve verdelingsfunctie. In dit bewijs probeert men de verdeling te vinden door de cumulatieve verdelingsfunctie van T te bepalen.
Bij definitie is dit: $F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t)$
De kans dat $T > t$, m.a.w. dat de tijd tussen 2 gebeurtenissen groter is dan *t* is net hetzelfde als de kans dat er geen enkele gebeurtenis optreedt in de tijd t.
Gebruik nu de evenredigheideigenschap van de Poissonverdeling:
Als X (het aantal gebeurtenissen per tijdseenheid) poisson verdeeld is met parameter λ dan is Y = het aantal gebeurtenissen in de tijd t ook poisson verdeeld maar met de parameter in evenredigheid aangepast, nl. λt.
Hiermee is $P(T > t) = P(Y = 0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$
en dus: $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
Dit is de verdelingfunctie van een exponentiele verdeling met parameter λ.

- Geheugenloosheid: Als X exponentieel verdeeld is dan geldt voor $t_1 > 0, t_2 > 0$
  $P(X > t_1 + t_2 | X > t_2) = P(X > t_1)$

  Interpretatie: De voorwaardelijke kans dat je een tijd $t_1 + t_2$ moet wachten op de volgende gebeurtenis als je al een tijd t_2 gewacht hebt is net hetzelfde als de onvoorwaardelijke kans om een tijd t_1 te wachten op de volgende gebeurtenis. De tijd t_2 die al verlopen is speelt dus geen rol, het systeem is als het ware vergeten dat er al een tijd t_2 verlopen is.