Poissonverdeling (pag. 91-96)

- De poissonverdeling komt voor in 2 gevallen:

1. Een poissonverdeling is een limietgeval van een binomiaalverdeling voor $n \to +\infty$, $p \to 0$ maar waarbij $np = \lambda$ constant blijft.
   De kansveranderlijke is dus het aantal keer succes op een heel groot aantal Bernouilli experimenten met een heel kleine kans op succes maar waarbij het verwachte aantal keren succes $np = \lambda$ vastligt.

   De benadering van de binomiaalverdeling door een Poissonverdeling is aanvaardbaar zodra $n > 30$ en $p < 0.1$

2. De kansveranderlijke is het aantal keer dat een bepaalde gebeurtenis zich voordoet in een eenheid van tijd of van ruimte waarbij het gemiddeld aantal keer dat dit gebeurt (= λ) gegeven is.

- Parameter = de intensiteit = λ (strikt positief reëel getal)

- de mogelijke waarden zijn alle natuurlijke getallen: $0, 1, 2, \cdots$

- Kansfunctie: $p_X(k) = P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
  voor elke $k \epsilon \mathbb{N}$

- Notatie: $X \sim Poisson(\lambda)$

- Kenmerken:
  - Verwachtingswaarde: $E(X) = \lambda$

  - Variantie: $Var(X) = \lambda$

  - Uitleg bij de afleidingen:

    De Taylorontwikkeling van de exponentiele functie hebben jullie in de cursus Wiskunde IA gezien.

    Bij het bewijs van de verwachtingswaarde mag je de term met $x = 0$ weglaten omdat deze gelijk is aan 0.
    In de overgang in de laatste regel stel je $x - 1 = x'$ en laat je dan voor eenvoud van schrijven het ‘-teken weer weg.

    Bij de afleiding van E[X²] mag je bij de 1ste stap $x = 0$ weglaten omdat deze term toch gelijk is aan 0. Bij de overgang van de 3de naar de 4e stap stel je $x = (x - 1) + 1$ en splits je de som op die manier op in 2 sommen. Vervolgens stel je in beide sommen $x - 1 = x'$ en laat je dan voor eenvoud van schrijven het ‘-teken weer weg. De eerste som is dan de verwachtingswaarde E[X] dus λ, de 2de som is 1 (zie (6.16)).

- Voorbeelden:
  - Het aantal auto's dat een parking oprijden in een uur, $\lambda =$het gemiddeld aantal auto's

  - Het aantal bezoekers aan de supermarkt per dag, $\lambda =$het gemiddeld aantal bezoekers: Stel dat metingen gedurende een jaar uitgewezen hebben dat er op een maandag gemiddeld 800 bezoekers zijn dan is het aantal bezoekers op een willekeurige maandag poisson verdeeld met parameter $\lambda = 800$.

  - Het aantal liter water dat valt per vierkante meter gedurende een bepaalde periode. Stel dat metingen hebben aangetoond dat er in de maand september gemiddeld 1000 l water valt per m^2 dan is het aantal liter water dat valt in een willekeurige septembermaand poisson verdeeld met parameter $\lambda = 1000$.

- Eigenschappen:
  - Veranderen we de tijd- of ruimte eenheid bij een Poissonverdeelde veranderlijke dan moeten we de parameter in evenredigheid aanpassen
    - Het aantal bezoekers op een halve dag is dus, in ons bovenstaand voorbeeld, poisson verdeeld met parameter $\lambda = \frac{800}{2} = 400$
    - Het aantal liter water dat valt per mm^2 in september is poisson verdeeld met parameter $\lambda = \frac{1000}{100^2} = 0.1$

  - De som van 2 poisson verdeelde veranderlijken is opnieuw een poisson verdeelde veranderlijke:
    Als $X_1 \sim Poisson(\lambda_1)$ en $X_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ dan is $Z = X_1 + X_2 \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$

    Voorbeeld:
    Stel dat het aantal bezoekers op een willekeurige maandag poisson verdeeld is met gemiddelde waarde 800 en dat het aantal bezoekers op een dinsdag ook poisson verdeeld is met gemiddelde waarde 1000 dan is het aantal bezoekers op de 2 eerste dagen van de week poisson verdeeld met gemiddelde 800+1000 = 1800.

    Uitleg bij het voorbeeld uit de cursus p 96:
    Het 0.95-kwantiel van X_1 is de kleinste *x*-waarde waarvoor de cumulatieve verdelingsfunctie $F_{X_1}(x) = P(X_1 \leq x) \geq 0.95$. Je kan ze vinden met de RM door de Solver te gebruiken. Druk hiertoe op MATH en dan op 0 (of gebruik de pijltjes tot je 0:Solver tegenkomt en dan ENTER). Kies de pijltoets naar boven om de vergelijking in te geven: druk op 2nd DISTR, ga met de pijltjes naar beneden tot je Poissoncdf vind, druk ENTER, typ nu: "3, X) – 0.95" ENTER en dan ALPHA SOLVE (ENTER toets). Na een tijdje verschijnt de oplossing: 6.
    Doe analoog voor X_2. De vergelijking is nu $0 = Poissoncdf(4, X) - 0.95$
    Resultaat: 8 . Het 0.95-kwantiel voor $X_1 + X_2$: vergelijking
    $0 = Poissoncdf(7, X) - 0.95$ geeft 12 als resultaat. Omdat $12 < 6+8$ is het dus voordeliger om een gezamenlijke voorraad te gebruiken.