Uitgewerkt voorbeeld discrete kansveranderlijke

Bij het gooien met 2 onvervalste dobbelstenen kunnen we als kansveranderlijke het verschil tussen het aantal ogen van de 2 dobbelstenen definiëren.
Stel dus: Y = verschil tussen het aantal ogen van de 2 dobbelstenen.

Dan kan Y de volgende 6 waarden aannemen: 0, 1, 2, 3, 4, 5

De kansverdeling van deze veranderlijke bekomen we door de kansdefinitie van Laplace te gebruiken. Het aantal mogelijke gevallen is telkens 36.

- Y = 0 : bekom je voor de worpen $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)$. Er zijn dus 6 gunstige gevallen: $P(Y=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
- Y = 1 : bekom je voor de worpen $(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)$ en in omgekeerde volgorde. Dus 10 gunstige gevallen: $P(Y=1)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$
- Y = 2 : bekom je voor de worpen $(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)$ en de koppels in omgekeerde volgorde. Dus 8 gunstige gevallen: $P(Y=2)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$
- Y = 3 : bekom je voor de worpen $(1,4),(2,5),(3,6)$ en omgekeerd. Dus 6 gunstige gevallen: $P(Y=3)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
- Y = 4 : bekom je voor de worpen $(1,5),(2,6),(5,1),(6,2)$: $P(Y=4)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$
- Y = 5 : bekom je voor de worpen $(1,6),(6,1)$: $P(Y=5)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

De kansverdeling is dus:

Y	0	1	2	3	4	5
p_Y	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

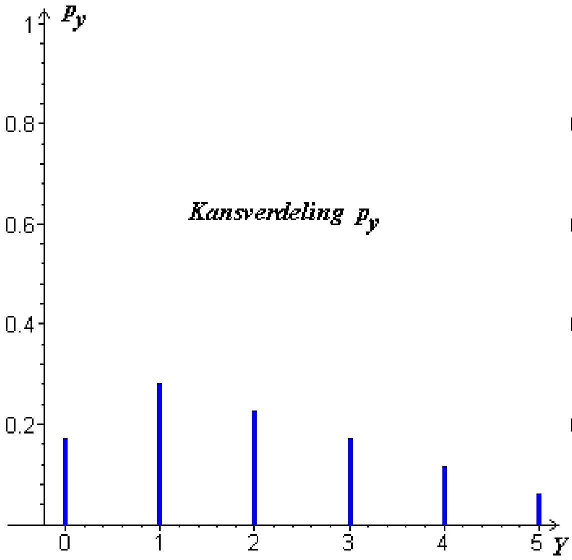
De cumulatieve verdelingsfunctie is dan:

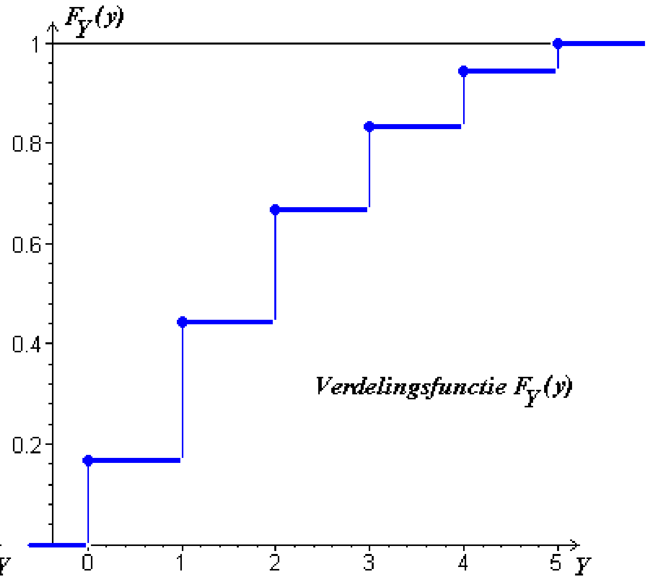
- $F_Y(0)=P(Y\le 0)=p_X(0)=\frac{6}{36}$
- $F_Y(1)=P(Y\le 1)=p_X(0)+p_X(1)=F_Y(0)+p_X(1)=\frac{6+10}{36}=\frac{16}{36}$
- $F_Y(2)=P(Y\le 2)=F_Y(1)+p_X(2)=\frac{16+8}{36}=\frac{24}{36}$
- $F_Y(3)=P(Y\le 3)=F_Y(2)+p_X(3)=\frac{24+6}{36}=\frac{30}{36}$
- $F_Y(4)=P(Y\le 4)=F_Y(3)+p_X(4)=\frac{30+4}{36}=\frac{34}{36}$

- $F_Y(5) = P(Y \le 5) = F_Y(4) + p_X(5) = \frac{34+2}{36} = 1$ (dit bewijst dat p_Y een kansfunctie is!)

En tussen de gehele waarden blijft de verdelingsfunctie constant.

Op een grafiek ziet dat er als volgt uit:





<u>Kenmerken van de discrete veranderlijke:</u>

1. Verwachtingswaarde

$$\mu_Y = E[Y] = \sum_{\text{alle } m_i} m_i\, p_Y(m_i)$$

$$= 0\cdot\frac{6}{36} + 1\cdot\frac{10}{36} + 2\cdot\frac{8}{36} + 3\cdot\frac{6}{36} + 4\cdot\frac{4}{36} + 5\cdot\frac{2}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18} = 1.944$$

Met het rekenmachine TI-83/84:
Stop de waarden voor Y in een lijst (bvb L1), stop de kansen in een andere lijst (bvb L2) (via STAT 1:Edit)
Kies dan: STAT, CALC, 1: 1-Var Stats 2nd L1 , 2nd L2 ENTER
De verwachtingswaarde lees je af als $\bar{x}$.

2. Variantie en standaardafwijking.

$$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2$$

$$E[Y^2] = 0^2\cdot\frac{6}{36} + 1^2\cdot\frac{10}{36} + 2^2\cdot\frac{8}{36} + 3^2\cdot\frac{6}{36} + 4^2\cdot\frac{4}{36} + 5^2\cdot\frac{2}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} = 5.833$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 = \frac{665}{18^2} = 2.052$$

$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \frac{\sqrt{665}}{18} = 1.433$$

Met het rekenmachine TI-83/84:
De standaardafwijking kan je aflezen als σx. Je kan dit opvragen via VARS 5:Statistics 4: σx ENTER 1.433
Dit kwadrateren geeft de variantie: x^2 ENTER geeft 2.052

3. Mediaan

$F_Y(1) = \frac{16}{36} < 0.50$ en $F_Y(2) = \frac{24}{36} \geq 0.50$ dus is de mediaan: $Med = 2$.

4. Kwartielen

Kwartiel van orde 0.25 : $F_Y(0) = \frac{6}{36} < 0.25$ en $F_Y(1) = \frac{16}{36} \geq 0.25$ dus is $Q_1 = 1$
Kwartiel van orde 0.75 : $F_Y(2) = \frac{24}{36} < 0.75$ en $F_Y(3) = \frac{30}{36} \geq 0.75$ dus is $Q_3 = 3$

5. Modus

De waarde voor Y waar de kans absoluut het hoogst is, is Y=1. Dit is dus de modus.

6. Scheefheid en kurtosis

Deze worden voor discrete verdelingen meestal niet berekend.