Uitgewerkt voorbeeld continue kansveranderlijke (Voorbeeld 4.13 p 60)

De kansveranderlijke X heeft de volgende kansdichtheid functie:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 & x \in [1,2] \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

De veranderlijke kan dus enkel waarden aannemen in het interval [1,2].

Deze functie is weldegelijk een kansdichtheid want:

- $f_X(x) \geq 0$ voor elke reëel getal.
- en:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} 3(x-1)^2 dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx \\ &= 3\int_{1}^{2} (x-1)^2 d(x-1) \\ &= 3\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^2 \\ &= 3\left[\frac{1}{3} - 0\right] = 1 \end{aligned}$$

De cumulatieve verdelingsfunctie berekenen we als volgt:
De kansdichtheid deelt de verzameling van de reële getallen op in 3 gebieden namelijk (zie ook bij de bovenstaande berekening van de integraal) de intervallen $]-\infty,1[$, $[1,2]$ en $]2,+\infty[$.
De berekening van de cumulatieve verdelingsfunctie wordt dus ook volgens deze intervallen op gesplitst:

1. $x \in]-\infty,1[$

   Dan is:

   $$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0 \end{aligned}$$

2. $x \in [1,2]$

   $$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{x} 3(x-1)^2 dx \\ &= 0 + 3\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^x \\ &= (x-1)^3 \end{aligned}$$

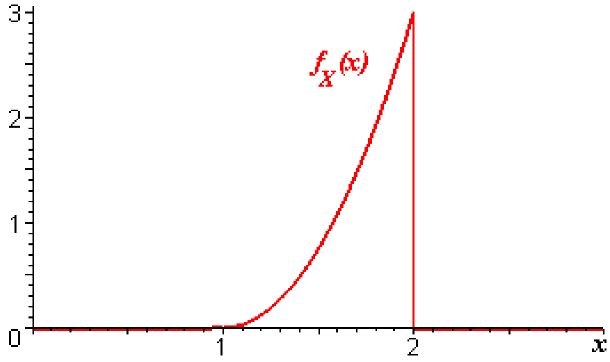
3. $x \in]2,+\infty[$

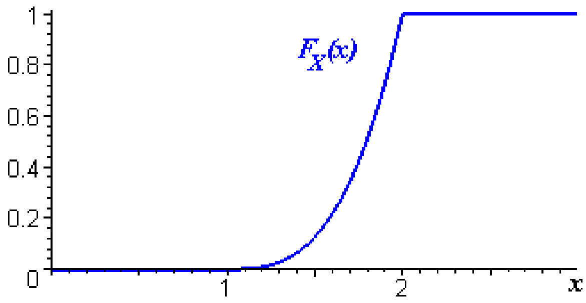
$$F_X(x) = P(X \le x)$$
$$= \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} 3(x-1)^2 dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx$$
$$= 0+1+0$$
$$=1$$

Samenvattend:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ (x-1)^3 & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

Op een grafiek zien de kansdichtheid en de verdelingsfunctie er als volgt uit:





<u>Kenmerken van de continue veranderlijke:</u>

1. Verwachtingswaarde

$$\mu_X = E[X]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} x\ 3(x-1)^2 dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx$$
$$= 0 + 3\int_{1}^{2} (x^3 - 2x^2 + x)dx + 0 \quad \text{(haakjes uitwerken)}$$

dus:

$$\mu_X = 3\left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$= 3\left[\frac{16}{4} - 2\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - (\frac{1}{4} - 2\frac{1}{3} + \frac{1}{2})\right]$$
$$= 3\left(\frac{15}{4} - \frac{14}{3} + \frac{3}{2}\right) = 3\frac{45-56+18}{12} = \frac{7}{4} = 1.75$$

2. Variantie en standaardafwijking.

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \ f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} x^2 \ 3(x-1)^2 dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx$$

$$= 0 + 3\int_{1}^{2} (x^4 - 2x^3 + x^2)dx + 0$$

$$= 3\left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= 3\left[\frac{32}{5} - 2\frac{16}{4} + \frac{8}{3} - (\frac{1}{5} - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{3})\right]$$

$$= 3\frac{31}{30} = \frac{31}{10} = 3.1$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{31}{10} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{3}{80} = 0.0375$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{3}{80}} = 0.193649$$

3. Mediaan

De mediaan is de waarde x_{med} waarvoor geldt dat:

$F_X(x_{med}) = 0.50$ of nog waarvoor $\int_{-\infty}^{x_{med}} f_X(x)dx = 0.50$

De mediaan zal zeker in het interval [1,2] liggen en vinden we door de volgende vergelijking op te lossen:

$F_X(x_{med}) = (x_{med} - 1)^3 = 0.50$

Dit geeft: $x_{med} - 1 = \sqrt[3]{0.50} \Leftrightarrow x_{med} = 1 + \sqrt[3]{0.50} = 1.7937$

4. Kwartielen

Kwartiel van orde 0.25 : $F_X(Q_1) = (Q_1 - 1)^3 = 0.25 \Leftrightarrow Q_1 = 1 + \sqrt[3]{0.25} = 1.6300$

Kwartiel van orde 0.75 : $F_X(Q_3) = (Q_3 - 1)^3 = 0.75 \Leftrightarrow Q_3 = 1 + \sqrt[3]{0.75} = 1.9086$

5. Modus

Op de grafiek van de kansdichtheid zien we duidelijk dat de kansdichtheid het grootst is in het randpunt $x = 2$. De modus is dus 2.

6. Scheefheid

$$\gamma_X = \frac{E\left[(X-\mu_X)^3\right]}{\sigma_X^3}$$

$$E\left[(X-\mu_X)^3\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\frac{7}{4})^3 f_X(x)dx$$
$$= 3\int_1^2 (x-\frac{7}{4})^3 (x-1)^2 dx$$
$$= \text{...(uitwerken haakjes, sorteren en dan integreren)}$$
$$= -\frac{1}{160}$$

Zodat: $\gamma_X = -\dfrac{\frac{1}{160}}{\frac{3}{80}\sqrt{\frac{3}{80}}} = -0.86$, de veranderlijke is dus links scheef

7. kurtosis

$$\kappa_X = \frac{E\left[(X-\mu_X)^4\right]}{\sigma_X^4}$$

$$E\left[(X-\mu_X)^4\right] = 3\int_1^2 (x-\frac{7}{4})^4 (x-1)^2 dx = ... = \frac{39}{8960}$$

Zodat: $\kappa_X = \dfrac{\frac{39}{8960}}{\frac{3}{80}\,\frac{3}{80}} = 3.0952$