

Toepassingen op de vermenigvuldigingsregel.

Een persoon trekt 4 kaarten uit een spel van 52 kaarten zonder terugleggen. Bereken de kans dat de 1^{ste} kaart een klaveren is, de 2^{de} en de 3^{de} een schoppen en de 4^{de} harten heer.

Noem, voor compactheid van de notatie:

A = 1^{ste} kaart is een klaveren

B = 2^{de} kaart is een schoppen

C = 3^{de} kaart is een schoppen

D = 4^{de} kaart is harten heer

Dan is gevraagd: $P(A \cap B \cap C \cap D)$

Oplossing: toepassen van de veralgemeende vermenigvuldigingsregel geeft:

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)P(D/A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{12}{50} \cdot \frac{1}{49} = 0.0000312$$

Immers:

$$P(A) = \frac{13}{52}$$

$P(B/A) = \frac{13}{51}$: Als de 1^{ste} kaart een klaveren is schieten er nog 51 kaarten over waarvan 13 schoppen.

$P(C/A \cap B) = \frac{12}{50}$: Als de 1^{ste} kaart een klaveren is en de 2^{de} een schoppen dan schieten er nog 50 kaarten over waarvan nog 12 schoppen.

$P(D/A \cap B \cap C) = \frac{1}{49}$: Als de 1^{ste} een klaveren is en de 2^{de} en de 3^{de} een schoppen dan schieten er nog 49 kaarten over met 1 harten heer erbij.

Opmerking: Veranderen we de opgave lichtjes naar: Bereken de kans dat bij de 4 kaarten 1 klaveren is, 2 schoppen en harten heer. In deze opgave moeten we dus geen rekening houden met de volgorde waarin we de kaarten trekken. Via een schema kunnen we dit vlug oplossen:

52 kaarten = 13 klaveren + 13 schoppen + 1 harten heer + 25 andere kaarten

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 4 & = & 1 & + & 2 & & + & 1 & + & 0 \end{array}$$

$$\text{Waaruit: kans} = \frac{\# \text{ gunstige}}{\# \text{ mogelijke}} = \frac{C_{13}^1 C_{13}^2 C_1^1 C_{25}^0}{C_{52}^4} = \frac{13 \frac{13 \cdot 12}{2!}}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{4!}{2!} \frac{13 \cdot 13 \cdot 12}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}$$

Deze kans is dus $\frac{4!}{2!} = 12$ keer groter. Deze factor komt overeen met het aantal

herhalingspermutaties van 4 elementen waarbij er 2x hetzelfde element voorkomt. Zie je het verband met “1 klaveren”, “2 schoppen” en “1 harten heer”? Inderdaad deze factor geeft het aantal volgorden waarin je die 4 kaarten kan trekken.

Je kan de oplossing dus ook vinden door $\frac{4!}{2!} = 12$ keer de vermenigvuldigingsregel toe te passen.