Inleidend voorbeeld van de wet van de totale kans en de regel van Bayes

Voorafgaande opmerking: De getallen en percentages in onderstaand voorbeeld zijn zuiver fictief en dienen enkel te illustratie van hoger genoemde regels.

In 1ste Bachelor Economie zijn 600 studenten ingeschreven. Bij inschrijving wordt onder andere gevraagd hoeveel uur wiskunde de studenten in hun laatste jaar SO gehad hebben. Als we de studenten nu opdelen volgens het aantal gekregen uren Wiskunde in het laatste jaar SO dan blijken 360 studenten 8 uur wiskunde gekregen te hebben, 120 studenten 6 uur, 90 studenten 4 uur en 30 studenten 3 uur of minder. Na het 1ste semester wordt het examen Wiskunde IA afgenomen. Uit de slaagcijfers blijkt dat 75% van de studenten die 8 uur wiskunde gehad hebben geslaagd zijn, 50% van de studenten die 6 uur gehad hebben, 20 % van 4 uurs en 10% van de 3 uur of minder.

Gevraagd:

a) Hoeveel studenten zijn er geslaagd voor Wiskunde IA?
b) Wat is de kans dat een willekeurig gekozen student geslaagd is voor Wiskunde IA?
c) Stel dat we er een geslaagde student uitkiezen. Bereken de kans dat het een student is die 8 uur wiskunde gehad heeft in het laatste jaar SO. Bereken deze kans ook voor de andere gevallen.

Oplossing:

a) Van de 8 uurs zijn er 0.75 x 360 = 270 studenten geslaagd.
   Van de 6 uurs: 0.50 x 120 = 60
   Van de 4 uurs: 0.20 x 90 = 18
   Van de 3 uur of minder: 0.10 x 30 = 3
   In totaal zijn er dus:
   0.75 x 360 + 0.50 x 120 + 0.20 x 90 + 0.10 x 30 = 270 + 60 + 18 + 3 = 351 studenten geslaagd voor Wiskunde IA

b) De kans dat een student geslaagd is, is uiteraard gelijk aan het slaagpercentage:

   $$\text{P(geslaagd)} = \frac{351}{600} = 58.50\%$$

   Rekening houdend met de berekening uit deel a) kunnen we dit ook als volgt schrijven:

   $$\text{P(geslaagd)} = \frac{0.75 \text{ x } 360 + 0.50 \text{ x } 120 + 0.20 \text{ x } 90 + 0.10 \text{ x } 30}{600}$$

   $$= 0.75 \times \frac{360}{600} + 0.50 \times \frac{120}{600} + 0.20 \times \frac{90}{600} + 0.10 \times \frac{30}{600}$$

   Hierbij is dus:

   $\frac{360}{600} = 0.60$, de relatieve frequentie van het aantal 8 uurs studenten

   $\frac{120}{600} = 0.20$, de relatieve frequentie van de 6 uurs

   $\frac{90}{600} = 0.15$, de relatieve frequentie van de 4 uurs

   $\frac{30}{600} = 0.05$, de relatieve frequentie van de 3 uurs of minder

Proberen we dit nu formeel te schrijven.
We definiëren hiertoe de gebeurtenissen:
A = student is geslaagd voor Wiskunde IA

$B_1 =$ de student heeft 8 uur wiskunde gehad in het laatste jaar SO

$B_2 =$ de student heeft 6 uur wiskunde gehad in het laatste jaar SO

$B_3 =$ de student heeft 4 uur wiskunde gehad in het laatste jaar SO

$B_4 =$ de student heeft 3 uur of minder wiskunde gehad in het laatste jaar SO

Dan kunnen we uit de gegevens de volgende kansen distilleren (via de frequentiedefinitie van kans):

$$P(B_1) = \frac{360}{600} = 0.60$$

$$P(B_2) = \frac{120}{600} = 0.20$$

$$P(B_3) = \frac{90}{600} = 0.15$$

$$P(B_4) = \frac{30}{600} = 0.05$$

De gegeven percentages kunnen we als voorwaardelijke kansen schrijven:

75% van de 8 uurs zijn geslaagd: $P(A/B_1) = 0.75$

50% van de 6 uurs zijn geslaagd: $P(A/B_2) = 0.50$

20% van de 4 uurs zijn geslaagd: $P(A/B_3) = 0.20$

10% van de 3 uur of minder zijn geslaagd: $P(A/B_4) = 0.10$

Waardoor de uitdrukking:

$$\text{P(geslaagd)} \;=\; 0.75\times\frac{360}{600}+0.50\times\frac{120}{600}+0.20\times\frac{90}{600}+0.10\times\frac{30}{600}$$

wordt:

$$P(A) \;=\; P(A/B_1)P(B_1)+P(A/B_2)P(B_2)+P(A/B_3)P(B_3)+P(A/B_4)P(B_4)$$

En dit is de wet van de totale kans: De onvoorwaardelijke (totale) kans op de gebeurtenis A is, als de uitkomstenruimte opgesplitst kan worden in een partitie van deelgebeurtenissen, op te splitsen als de som van de voorwaardelijke kansen op A vermenigvuldigt met de respectievelijke kansen van de deelgebeurtenissen.

c) Gevraagd is: $P(B_1/A)$?

Via de vermenigvuldigingsregel kunnen we de kans op de doorsnede van B_1 en A op 2 manieren schrijven:

$$P(A\cap B_1) = P(B_1/A)P(A) = P(A/B_1)P(B_1)$$

Uit de laatste gelijkheid volgt:

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.75\cdot 0.60}{0.585} = 0.769$$

Analoog:

$$P(B_2 / A) = \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{0.50 \cdot 0.20}{0.585} = 0.171$$

$$P(B_3 / A) = \frac{P(A/B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{0.20 \cdot 0.15}{0.585} = 0.051$$

$$P(B_4 / A) = \frac{P(A/B_4)P(B_4)}{P(A)} = \frac{0.10 \cdot 0.05}{0.585} = 0.009$$

Merk op dat de som van deze voorwaardelijke kansen gelijk is aan 1. Dit is perfect logisch want de geslaagde student behoort zeker tot een van de 4 deelgroepen.