Kansfunctie

Aan elke gebeurtenis A associëren we een getal tussen 0 en 1 dat uitdrukt wat de kans is dat de gebeurtenis A optreedt. Zo ontstaat er dus een functie tussen de verzameling van de gebeurtenissen (notatie: $\mathcal{A}$, dit is dus de verzameling van alle deelverzamelingen van Ω) en het interval [0,1] . Deze functie noemen we de kansfunctie.
De notatie uit de cursus:

$$\mathrm{P}: \mathcal{A} \to [0,1] : \mathrm{A} \mapsto \mathrm{P}[\mathrm{A}]$$

moet je dus lezen als: de functie P beeldt de verzameling van de gebeurtenissen af op het interval [0,1] zodat de gebeurtenis A afgebeeld wordt op de kans op A, P[A].

Deze kansfunctie moet voldoen aan 3 fundamentele eisen die we de axioma's van de kansrekening noemen (in woorden):

- **Axioma 1**: De kans op een gebeurtenis is steeds groter of gelijk aan 0.
- **Axioma 2**: De kans op de zeker gebeurtenis is 1.
- **Axioma 3**: De kans op de unie van (een aftelbaar aantal) disjuncte gebeurtenissen is gelijk aan som van de kansen van de respectievelijke gebeurtenissen.

We hebben dus op de uitkomstenverzameling Ω een bewerking P gedefinieerd. Beide samen, m.a.w. het paar (Ω,P), noemen we een **kansruimte**.
(vergelijk dit met de notatie $\mathbb{R},+$ voor de verzameling van de reële getallen voorzien van de bewerking optellen of $\mathbb{R},+$,x voor de reële vectorruimte) .

De volgende definities van een kansfunctie treden regelmatig op:

- De **frequentiedefinitie** of empirische definitie:
  Als we eenzelfde experiment een groot aantal keer herhalen dan kunnen we tellen hoeveel keer de gebeurtenis A opgetreden is (= de frequentie van A) en kunnen we dus ook de relatieve frequentie bepalen (= frequentie / aantal experimenten). Deze relatieve frequentie kunnen we gebruiken als schatting voor de kans op de gebeurtenis A. Hoe meer experimenten hoe beter de schatting zal zijn want de relatieve frequentie zal stabiliseren rond een bepaalde waarde.

- **Kansdefinitie van Laplace**:
  Deze definitie kan enkel toegepast worden voor zogenaamde **symmetrische experimenten.** De eisen hiervoor zijn:
    - Het aantal uitkomsten is eindig
    - Elke uitkomst heeft evenveel kans om op te treden.

  De kans op de gebeurtenis A is, als deze eisen voldaan zijn:

$$\boxed{\mathrm{P(A)} = \frac{\text{aantal elementen van A}}{\text{aantal elementen van }\Omega} = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}}$$

  Vele experimenten zijn symmetrisch bvb. bij het gooien van 1 (onvervalste) dobbelsteen hebben alle 6 de mogelijke uitkomsten (1,2,…,6) evenveel kans om op te treden.
  Toch is voorzichtigheid vereist. Bvb. bij het gooien met meerdere dobbelstenen stelt zich een probleem als we niet opletten. Bij het registreren van het resultaat van een worp met 2 dobbelstenen gaan we meestal gewoon het aantal ogen noteren van de 2 dobbelstenen. Hierbij wordt geen onderscheid gemaakt tussen de 2 dobbelstenen. De ene dobbelsteen een 2 en de ander een 1 wordt als resultaat (2,1) genoteerd. Nochtans kunnen we dit

resultaat op 2 manieren bekomen(1^{ste} = 2 en 2^{de} = 1 of 1^{ste} = 1 en 2^{de} = 2). Daarentegen kan het resultaat (1,1) slechts op 1 manier bekomen worden. Willen we de kansdefinitie van Laplace op dit experiment toepassen dan moeten we dus onderscheid maken tussen de dobbelstenen en rekening houden met de volgorde van de dobbelstenen. M.a.w we moeten de uitkomsten (2,1) en (1,2) als verschillende uitkomsten zien. Op deze manier heeft elke mogelijke uitkomst $(i, j), i = 1 \ldots 6, j = 1 \ldots 6$ evenveel kans om op te treden (nl. $\frac{1}{36}$) en kunnen we de definitie van Laplace toepassen.

Moeten we de kans berekenen dat we met 2 dobbelstenen samengeteld 6 gooien dan kunnen we dit als volgt berekenen:

- aantal mogelijke uitkomsten: voor elke dobbelsteen 6 mogelijkheden dus $6^2 = 36$
- aantal gunstige uitkomsten: 6 kunnen we bekomen met als resultaat van de worp (1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1), dus 5 mogelijkheden
- kans = $\frac{5}{36} = 0.1389$