Herhalingscombinatie: extra uitleg.

Een **herhalingscombinatie** is een **ongeordende keuze** van **k objecten** uit een **totaal van n verschillende objecten met teruglegging** van de gekozen objecten.
Er wordt dus k keer gekozen uit de n objecten waarbij hetzelfde object meerdere keren kan gekozen worden en dat de volgorde binnen de uiteindelijke selectie van de k objecten niet belangrijk is.

- Laat ons beginnen met een voorbeeld:

Opgave: Op hoeveel manieren kan je 10 identieke ballen verven als je hiervoor de keuze hebt uit 4 verschillende kleuren.

Oplossing:
Je moet dus 10 (= k) keer een keuze maken uit de 4 (= n) kleuren. Dezelfde kleur kan hierbij meerdere keren voorkomen en als 2 ballen met dezelfde kleur geverfd worden is er geen onderscheid tussen. Enkel de hoeveelheden ballen van elke kleur spelen een rol dus heeft de volgorde waarin je ze legt geen belang. Dit is dus duidelijk een voorbeeld van een herhalingscombinatie van 10 objecten (de ballen) uit een totaal van 4 objecten (de kleuren).

Hoeveel manieren zijn er nu?

Om dit in te zien beschouwen we een mogelijk geval:
Nummer de kleuren van 1 tot 4, dan ziet een mogelijk geval er bvb. als volgt uit:
3 1 2 2 4 1 3 2 1 4
Omdat de volgorde geen rol speelt kunnen we de ballen die met de zelfde kleur geverfd zijn samen plaatsen en in opklimmende volgorde:
1 1 1 2 2 2 3 3 4 4
Er zijn dus:
$k_1 = 3$ ballen met kleur 1,
$k_2 = 3$ ballen met kleur 2,
$k_3 = 2$ ballen met kleur 3,
$k_4 = 2$ ballen met kleur 4. Merk op dat k_4 vastligt door de aantallen k_1, k_2 en k_3, er zijn immers slechts k = 10 ballen in totaal dus moet $k_1+k_2+k_3+k_4 = k = 10$.

Om een mogelijk geval vast te leggen komt het er dus op aan om de aantallen k_1, k_2 en k_3 vast te leggen. We kunnen dit als volgt doen.

- Als we in bovenstaand voorbeeld na de groep ballen met kleur 1, 1 1 1 dus, een streep invoeren dan staat deze op de $3 + 1 = k_1 + 1 = 4^e$ positie, en de positie van deze streep bepaalt dus volledig k_1, het aantal ballen met kleur 1. Idd: staat deze streep op positie 3 dan weet je dat er 2 ballen zijn met kleur 1 ($k_1 = 2$), staat de streep op positie 1 dan zijn er geen ballen met kleur 1 en dus is $k_1 = 0$.
- Zetten we ook na de groep ballen met kleur 2 een streep dan staat die streep op positie $3+1+3+1 = k_1 + 1 + k_2 + 1$. De positie van deze streep bepaalt volledig k_2, want k_1 kennen we al.
- Zo doen we voort. Plaats na de groep met kleur 3 een streep. De positie van deze streep bepaalt volledig k_3 = aantal ballen met kleur 3.
- Het aantal ballen met kleur 4 ligt nu vast want $k_4 = 10 - k_1 - k_2 - k_3$

Het plaatsen van 3 (= n-1) strepen legt dus volledig vast hoeveel ballen er van elke kleur optreden. Het probleem is dus herleid tot het plaatsen van 3 (= n-1) strepen op in totaal

13 = 3 + 3 + 2 + 2 + 3 = $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + n - 1 = k + n - 1$ posities. We moeten dus 3 verschillende posities kiezen uit 13. Omdat er geen onderscheid is tussen de strepen speelt de volgorde waarin we kiezen geen rol, we hebben dus te maken met een combinatie van 3 uit 13. Het aantal mogelijke herhalingscombinaties van 10 uit 4 is dus herleidt tot het aantal combinaties van 3 (= 4-1) uit 13 (= 10+4-1):

$$C_{13}^{3} = \binom{13}{3} = \frac{13!}{3!10!} = \frac{13.12.11}{3.2.1} = 286$$

- Algemeen

Opgave: Op hoeveel manieren kan je k objecten kiezen uit n verschillende objecten, met teruglegging. Je kiest dus k keer uit de n objecten waarbij hetzelfde object meerdere malen gekozen kan worden.

Oplossing:
Je moet dus k keer een keuze maken uit de n objecten

Op hoeveel manieren kan dit?

Na samen plaatsen van de gelijke objecten(dit mag want de volgorde speelt toch geen rol), ziet een mogelijk geval er steeds zo uit:

$$\underbrace{o_1 \ldots o_1}_{k_1} \underbrace{o_2 \ldots o_2}_{k_2} \ldots \underbrace{o_{n-1} \ldots o_{n-1}}_{k_{n-1}} \underbrace{o_n \ldots o_n}_{k_n}$$

Er is dus:
k_1 keer object 1 gekozen,
k_2 keer object 2,
…
k_{n-1} keer object n-1,
k_n keer object n. Merk op dat k_n vastligt door de aantallen $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$, er zijn immers in totaal k keuzes te maken dus: $k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}+k_n=k$.

Om een mogelijk geval vast te leggen komt het er dus op aan om de aantallen $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ vast te leggen.
We kunnen dit als volgt doen.
- Als we na groep objecten o_1 een streep invoeren dan staat deze streep op de $k_1 + 1$ ^{e} positie, en de positie van deze streep bepaalt dus volledig k_1= het aantal objecten van type o_1.
- Zetten we ook na de groep objecten o_2 een streep dan staat die streep op positie $k_1 + 1 + k_2 + 1$. De positie van deze streep bepaalt volledig k_2, want k_1 kennen we al.
- Zo doen we voort. Plaats na de groep o_3 een streep. De positie van deze streep bepaalt volledig k_3
- …
- Een streep na de groep o_{n-1} bepaalt volledig k_{n-1}.
- Het aantal gekozen objecten van type o_n ligt hiermee vast want $k_n=k- k_1-k_2-\ldots-k_{n-1}$

We krijgen dus als we de strepen toevoegen: $\underbrace{o_1 \ldots o_1}_{k_1} | \underbrace{o_2 \ldots o_2}_{k_2} | \ldots | \underbrace{o_{n-1} \ldots o_{n-1}}_{k_{n-1}} | \underbrace{o_n \ldots o_n}_{k_n}$

Het plaatsen van deze n-1 strepen legt dus volledig vast hoeveel objecten er van elke soort gekozen zijn. Het probleem is dus herleid tot het plaatsen van n-1 strepen op in totaal

$k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}+k_n + n - 1 = k + n - 1$ posities. We moeten dus n-1 verschillende posities kiezen uit k+n-1. Omdat er geen onderscheid is tussen de strepen speelt de volgorde waarin we kiezen geen rol, we hebben dus te maken met een combinatie van n-1 uit k+n-1.
Het aantal mogelijke herhalingscombinaties van k uit n is dus herleidt tot het aantal combinaties van n-1 uit k+n-1:

$$C_{k+n-1}^{n-1} = \binom{k+n-1}{n-1} = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(k+n-1)(k+n-2)...(k+1)}{(n-1)!}$$