Overzicht combinatieleer

Basis = Productregel:
Het aantal mogelijkheden van een experiment bestaande uit 2 deelexperimenten is gelijk aan het product van de mogelijkheden van de deelexperimenten.

Bvb. bij het gooien met 2 dobbelstenen zijn er voor de 1ste dobbelsteen 6 mogelijkheden, voor de 2de eveneens 6, dus zijn er voor 2 dobbelstenen samen
6.6 = 36 mogelijkheden.

Deze productregel is de basis voor het bepalen van het aantal mogelijkheden voor de onderstaande veel voorkomende trekkingen:

- **Herhalingsvariatie** = k keer trekken uit een populatie van n (verschillende) elementen **met teruglegging** en waarbij de **volgorde** binnen de k getrokken elementen **belangrijk** is.

  Voor de 1ste trekking hebben we n mogelijkheden, voor de 2de ook n, …, voor de k^{de} ook n. Er zijn dus volgens de productregel n^k herhalingsvariaties.

- **Variatie** = k keer trekken uit een populatie van n (verschillende) elementen **zonder terugleggen** en waarbij de **volgorde** binnen de k getrokken elementen **belangrijk** is.

  Voor de 1ste trekking zijn er n mogelijkheden, voor de 2de maar n-1 meer, …, voor de k^{de} maar n-(k-1) = n-k+1 meer. Dus het aantal variaties is via de productregel:
$$V_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Permutatie** = trekken van n elementen uit een populatie van n (verschillende) elementen **zonder terugleggen** en waarbij de **volgorde belangrijk** is. Dit is dus een variatie van n uit n en kan ook opgevat worden als het herschikken van de n elementen.
  Het aantal permutaties van n elementen is dus:
$$P_n = V_n^n = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

- **Herhalingspermutatie =** trekken van n elementen uit een populatie van n niet noodzakelijk verschillende elementen. Onderstel dat er m verschillende objecten zijn $o_1, o_2, \ldots, o_m$ die respectievelijk $n_1, n_2, \ldots, n_m$ keer voorkomen met uiteraard $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ (in totaal n elementen). Omdat we geen onderscheid kunnen maken tussen de gelijke objecten moeten we het aantal permutaties van n elementen delen door het aantal mogelijkheden om de gelijke objecten te herschikken dus voor elk object delen door het aantal permutaties van dat type object. Het aantal herhalingspermutaties is dus:
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$$

- **Combinatie** = k keer trekken uit een populatie van n (verschillende) elementen **zonder terugleggen** en waarbij de **volgorde** binnen de k getrokken elementen **niet belangrijk** is.
  Het verschil met een variatie is dat de volgorde binnen de k getrokken elementen niet belangrijk is. Alle trekkingen die dezelfde k elementen opleveren zijn dus als gelijk op te vatten. Er zijn k! trekkingen met dezelfde k elementen dus moeten we om het aantal combinaties te vinden het aantal variaties delen door k! :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- **Herhalingscombinatie** = k keer trekken uit een populatie van n (verschillende) elementen **met terugleggen** en waarbij de **volgorde** binnen de k getrokken elementen **niet belangrijk** is.
  De afleiding van het aantal herhalingscombinaties is niet zo voor de hand liggend. Hier vindt u deze afleiding terug.
  Conclusie is dat een herhalingscombinatie van k uit n neerkomt op een combinatie van n-1 uit k+n-1 :

  Aantal herhalingscombinaties van k uit n: $C_{k+n-1}^{n-1} = \binom{k+n-1}{n-1} = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!}$

Een paar voorbeelden:

- Hoeveel nummerplaten zijn er bestaande uit 3 letters gevolgd door 3 cijfers (0 t.e.m. 9)?

  Oplossing: voor elk van de 3 letters kunnen we kiezen uit alle 26 letters. Dezelfde letter mag meerdere malen voorkomen en de volgorde is belangrijk. We hebben dus te maken met een herhalingsvariatie van 3 uit 26 : $26^3 = 17576$
  Analoog is de keuze van de cijfers een herhalingsvariatie van 3 uit 10. Het aantal nummerplaten is dus $26^3 \cdot 10^3 = 17576 \cdot 1000 = 17.576.000$

  Alternatieve oplossing (logisch nadenken = de redenering herhalen die tot de algemene formule leidt):
  Voor de 1^ste^ letter zijn er 26 mogelijkheden, voor de 2^de^ ook en voor de 3^de^ ook. Voor de cijfers heb je telkens 10 mogelijkheden. Dus aantal nummerplaten is $26^3 \cdot 10^3 = 17.576.000$

- Hoeveel nummerplaten zijn er met 3 verschillende letters gevolgd door 3 verschillende cijfers?

  Oplossing: de letters moeten verschillend zijn dus hebben we nu te maken met een variatie van 3 uit 26 voor de keuze van de letters: $V_{26}^3 = 26 \cdot 25 \cdot 24 = \frac{26!}{23!} = 15600$.
  De cijfers: variatie van 3 uit 10: $V_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
  Het aantal nummerplaten met allemaal verschillende letters en cijfers is dus:
  $V_{26}^3 \cdot V_{10}^3 = 15600 \cdot 720 = 11.232.000$

- Op hoeveel manieren kan een kaartspeler 8 kaarten krijgen als deze willekeurig getrokken worden uit een gewoon spel kaarten van 52.

  Oplossing: Het gaat uiteraard om 8 verschillende kaarten en enkel de hand van de 8 kaarten is belangrijk dus de volgorde waarin de 8 kaarten getrokken worden doet er niet toe. We hebben dus te maken met een combinatie van 8 uit 52: $C_{52}^8 = \frac{52!}{8!44!} = 752.538.150$

- Hoeveel manieren zijn er als er bij de 8 kaarten 2 azen moeten zijn?

  Oplossing: Er zijn 4 azen in een spel van 52, en dus 52-4 = 48 andere kaarten. De vraag is dus. Op hoeveel manieren kunnen we 2 azen trekken uit 4 **en** 8-2 = 6 kaarten trekken uit de overige 48 kaarten? Het aantal mogelijkheden is dus: combinatie van 2 uit 4 vermenigvuldigt met combinatie van 6 uit 48: $C_4^2 \cdot C_{48}^6 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{48!}{6!42!} = 73.629.072$

  Om een dergelijk probleem op te lossen kunnen we ook handig gebruik maken van een schema:

  52 kaarten = 4 azen + 48 andere

  ↓ ↓ ↓

  8 = 2 + 6

  8 kaarten trekken uit de 52 waarbij 2 azen kan dus op combinatie van 2 uit 4 x combinatie van 6 uit 48 manieren.
  Zo'n schema wordt nog nuttiger als het probleem nog ingewikkelder is:

- Hoeveel manieren zijn er om 13 kaarten te trekken uit een spel van 52 waarbij 2 harten zijn,geen klaveren en schoppen 7, 8 en 9?

  Het schema ziet er nu als volgt uit:
  52 kaarten = 13 harten + 13 klaveren + schoppen 7,8,9 + 23 andere kaarten

  ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

  13 = 2 + 0 + 3 + 8

  Het aantal mogelijkheden is dus: $C_{13}^2 \cdot C_{13}^0 \cdot C_3^3 \cdot C_{23}^8 = \frac{13 \cdot 12}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{23!}{8!15!} = 38.244.492$

- Op hoeveel manieren kunnen uit 7 personen er minstens 2 geboren zijn op dezelfde dag van de week?

  Oplossing: minstens 2 wil zeggen 2, 3, 4, 5, 6 of alle 7 op dezelfde dag. Het is dus voordeliger van dit als volgt aan te pakken. Het aantal gevallen waarbij er minstens 2 op dezelfde van de week verjaren is het totaal aantal mogelijkheden voor de verjaardagen zonder eisen vermindert met de gevallen waarbij ze alle 7 op een andere dag van de week verjaren.

  Het aantal mogelijkheden voor de verjaardagen van de week van de 7 personen zonder eisen is een herhalingsvariatie van 7 uit 7. Voor elke persoon zijn er immers 7 mogelijkheden. Dus aantal = 7^7

  Het aantal mogelijkheden waarbij ze alle 7 op een andere dag van de week verjaren is een permutatie van 7 elementen (of een variatie van 7 uit 7). De 1ste persoon heeft immers 7 mogelijkheden, de 2de 6, …, de 7de nog 1. Dus aantal = 7.6.5.4.3.2.1 = 7!

  De oplossing van het oorspronkelijk probleem is dus:
  $7^7 - 7! = 818.503$