Oplossing oefening 133

Gegeven:
$X_1, X_2, X_3 \sim N(0,4)$
$Y \sim \chi^2$-verdeeld met 9 vrijheidsgraden
X_1, X_2, X_3 en Y zijn 2 aan 2 onafhankelijk.

Gevraagd:

(a) Bepaal a zodat: $P(X_1 < a\sqrt{Y}) = 97.5\%$

Doordat in deze kans een vierkantswortel voorkomt van een χ^2-verdeelde veranderlijke denken we aan de de t verdeling. We proberen nu de kans om te vormen naar een t-verdeling. De gedaante van een t-verdeelde veranderlijke is als volgt:

$$t_n \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}} \text{ met } Z \sim N(0,1)$$

De gegeven kans kunnen we als volgt schrijven:

$$P(\frac{X_1}{\sqrt{Y}} < a) = 0.975$$

De optredende veranderlijk is nog niet van de goede vorm. We moeten nog 2 aanpassingen maken:

- Van X_1 een standaard normaal verdeelde veranderlijke maken:

  Omdat $X_1 \sim N(0,4)$ is $\frac{X_1}{2} \sim N(0,1)$.

  We moeten dus in het LL delen door 2. Uiteraard moeten we dit dan ook in het RL. We krijgen:

  $$P(\frac{\frac{X_1}{2}}{\sqrt{Y}} < \frac{a}{2}) = 0.975$$

- Onder de wortel nog delen door het aantal vrijheidsgraden van de χ^2-verdeelde veranderlijke. Dit komt neer op beide leden vermenigvuldigen met $\sqrt{9} = 3$. Dit geeft: $P(\frac{\frac{X_1}{2}}{\sqrt{\frac{Y}{9}}} < 3 \cdot \frac{a}{2}) = 0.975$

We moeten dus de volgende vergelijking oplossen naar a:

$$P(t_9 < \frac{3a}{2}) = 0.975$$

Met de solver van je RM gaat dit als volgt:
eqn: 0=tcdf(-1E99,3*X/2,9)-0.975 ENTER
Geef een beginwaarde in bvb X=1 en druk op ALPHA ENTER → X=1.5081

(b) Bepaal a zodat: $P(aX_1^2 \geq X_2^2 + X_3^2) = 5\%$

Omdat in het rechterlid van de ongelijkheid een som van kwadraten staat en in het linkerlid ook een kwadraat denken we aan de F-verdeling. Een F-verdeling is een quotiënt van 2 χ^2-verdelingen dus moeten we eerst de kans als volgt schrijven:

$$P(\frac{X_2^2 + X_3^2}{X_1^2} \leq a) = 0.05$$

Een χ^2-verdeling is een som van kwadraten van standaardnormaal verdeelde veranderlijken. Dus moeten we eerst de X_i standaardiseren door ze te delen door hun standaardafwijking:

$$P\left(\frac{(\frac{X_2}{2})^2 + (\frac{X_3}{2})^2}{(\frac{X_1}{2})^2} \leq a\right) = 0.05$$

(Omdat we in teller en noemer in feite delen door 4 heeft dit geen effect op het RL)
Of kompakter:

$$P\left(\frac{Z_2^2 + Z_3^2}{Z_1^2} \leq a\right) = 0.05$$

De optredende veranderlijke in het LL heeft nog niet perfect de vorm van een F-verdeling. Bekijk de karakteristatie van de F-verdeling:

$$F_{n,m} \sim \frac{\frac{\chi_n^2}{n}}{\frac{\chi_m^2}{m}}$$

We moeten dus nog in teller en noemer delen door het respectievelijke aantal vrijheidsgraden en dit ook aanpassen in het RL.

$$P\left(\frac{\frac{Z_2^2 + Z_3^2}{2}}{\frac{Z_1^2}{1}} \leq \frac{a}{2}\right) = 0.05$$

De op te lossen vergelijking is dus:

$$P(F_{2,1} \leq \frac{a}{2}) = 0.05$$

RM: solver
eqn: 0=Fcdf(0,X/2,2,1)-0.05
beginwaarde X=1 geeft : X = 0.108033