Oplossing oefening 85

Gegeven: De 3-voudige kansveranderlijke $\overrightarrow{X} = (X, Y, Z)$ kan volgende 8 waarden aannemen
$(0,0,1), (1,0,1), (0,1,2), (1,2,0), (0,2,3), (1,1,3), (0,0,3), (1,2,2)$
met gelijke kans, dus:

$$p(0,0,1) = p(1,0,1) = p(0,1,2) = p(1,2,0) = p(0,2,3) = p(1,1,3) = p(0,0,3) = p(1,2,2) = \frac{1}{8}$$

Gevraagd:

(a) De waarde van de cumulatieve functie in (1,2,2):

$$F_X(1,2,2) = P(X \leq 1 \; en \; Y \leq 2 \; en \; Z \leq 2)$$
$$= som\ van\ p(x,y,z)\ over\ alle\ waarden\ van\ x,y,z\ die\ voldoen\ aan\ de\ ongelijkheden$$
$$= p(0,0,1) + p(1,0,1) + p(0,1,2) + p(1,2,0) + p(1,2,2)$$
$$= \frac{5}{8}$$

(b) De kans dat Z niet meer dan 1 groter is dan X: $P(Z \leq X + 1)$

$$P(Z \leq X + 1) = som\ van\ p(x,y,z)\ over\ alle\ waarden\ van\ x\ en\ z\ die\ voldoen\ aan\ de\ ongelijkheid$$
$$= p(0,0,1) + p(1,0,1) + p(1,2,0) + p(1,2,2)$$
$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(c) De marginale verdelingen:

X kan als waarden aannemen 0 en 1. De bijhorende kansen zijn:

$$p_X(0) = P(X = 0) = som\ van\ p(0,y,z)\ over\ alle\ waarden\ van\ y\ en\ z$$
$$= p(0,0,1) + p(0,1,2) + p(0,2,3) + p(0,0,3)$$
$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$p_X(1) = P(X = 1) = som\ van\ p(1,y,z)\ over\ alle\ waarden\ van\ y\ en\ z$$
$$= p(1,0,1) + p(1,2,0) + p(1,1,3) + p(1,1,2)$$
$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(Wat vanzelfsprekend is want de som van de kansen moet 1 zijn)

Y kan als waarden 0,1 en 2 aannemen. De marginale verdeling is:

$$p_Y(0) = P(Y = 0) = som\ van\ p(x,0,z)\ over\ alle\ waarden\ van\ x\ en\ z$$
$$= p(0,0,1) + p(1,0,1) + p(0,0,3)$$
$$= \frac{3}{8}$$
$$p_Y(1) = P(Y = 1) = som\ van\ p(x,1,z)\ over\ alle\ waarden\ van\ x\ en\ z$$
$$= p(0,1,2) + p(1,1,3)$$
$$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$p_Y(2) = P(Y=2) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

Z kan als waarden aannemen 0,1,2 en 3:

$$p_Z(0) = P(Z=0) = som\ van\ p(x,y,0)\ over\ alle\ waarden\ van\ x\ en\ y$$
$$= p(1,2,0) = \frac{1}{8}$$
$$p_Z(1) = P(Z=1) = som\ van\ p(x,y,1)\ over\ alle\ waarden\ van\ x\ en\ y$$
$$= p(0,0,1) + p(1,0,1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$
$$p_Z(2) = P(Z=2) = som\ van\ p(x,y,2)\ over\ alle\ waarden\ van\ x\ en\ y$$
$$= p(0,1,2) + p(1,2,2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$
$$p_Z(3) = P(Z=3) = som\ van\ p(x,y,3)\ over\ alle\ waarden\ van\ x\ en\ y$$
$$= p(0,2,3) + p(1,1,3) + p(0,0,3) = \frac{3}{8}$$

(d) Zijn X en Y onafhankelijk?
X en Y zijn onafhankelijk als $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ voor elke mogelijk *x* en *y*.
Is dit zo voor $X=0, Y=0$?

$$p_{XY}(0,0) = som\ van\ p(0,0,z)\ over\ alle\ waarden\ van\ z$$
$$= p(0,0,1) + p(0,0,3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$
$$p_X(0)p_Y(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$$

dus is $p_{XY}(0,0) \neq p_X(0)p_Y(0)$ en X en Y zijn dus afhankelijk.

(e) Uit de afhankelijkheid van X en Y kunnen we niets afleiden i.v.m met de correlatie.
Berekening van de correlatie:

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$E(X) = 0 \cdot p_X(0) + 1 \cdot p_X(1) = p_X(1) = \frac{1}{2}$$
$$E(Y) = 0 \cdot p_Y(0) + 1 \cdot p_Y(1) + 2 \cdot p_Y(2) = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} = 1$$

$$E(XY) = 0\cdot 0\cdot p_{XY}(0,0) + 1\cdot 0\cdot p_{XY}(1,0) + 0\cdot 1\cdot p_{XY}(0,1) + 0\cdot 2\cdot p_{XY}(0,2)$$
$$+1\cdot 1\cdot p_{XY}(1,1) + 1\cdot 2\cdot p_{XY}(1,2)$$
$$= p_{XY}(1,1) + 2p_{XY}(1,2)$$
$$= p(1,1,3) + 2(p(1,2,0) + p(1,2,2))$$
$$= \frac{1}{8} + 2\cdot\frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

Dus: $Cov(X,Y) = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{8}$

- $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= 0^2\cdot p_X(0) + 1^2\cdot p_X(1) - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Dus: $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{2}$

- $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)}$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$
$$= 0^2\cdot p_Y(0) + 1^2\cdot p_Y(1) + 2^2\cdot p_Y(2) - 1^2$$
$$= \frac{1}{4} + 4\cdot\frac{3}{8} - 1 = \frac{3}{4}$$

Dus: $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Waaruit: $Corr(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = 0.2887$