Oefening 82

Gegeven: $p(x,y)=\dfrac{a}{n(n+1)},1\le y\le x\le n$

De kansverdeling is constant voor waarden van *x* en *y* die lopen van 1 t.e.m. n, maar waarvoor *y* niet groter is dan *x*. Voor waarden van *x* en *y* (van 1 t.e.m. n) die niet aan deze ongelijkheden voldoen, dus waarvoor *y* > *x* is de kans = 0. Probeer deze kansverdeling zelf eens in een tabel voor te stellen.

a. Voorwaarden:

   i. $p(x,y)=\dfrac{a}{n(n+1)}\ge 0$, is voldaan als $a\ge 0$.

   ii. $\sum\sum p(x,y)=1$:

   Sommeren over alle waarden van *x* van 1 t.e.m n. *y* mag niet groter zijn dan *x* dus sommeren voor *y* van 1 t.e.m *x*:

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{x}\frac{a}{n(n+1)}=\frac{a}{n(n+1)}\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{x}1$$
$$=\frac{a}{n(n+1)}\sum_{x=1}^{n}x=\frac{a}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{a}{2}=1$$

   Dus is: $a=2$

   Dus is: $p(x,y)=\dfrac{2}{n(n+1)},1\le y\le x\le n$

b. Om de marginale verdelingen te bepalen moet je sommeren over alle mogelijke waarden van de andere veranderlijke. De marginale verdeling voor de variabele X in een waarde *x* vind je dus door te sommeren over alle mogelijke waarden van *y* die met *x* kunnen optreden: *y* = 1... *x*

$$\boldsymbol{p_X(x)=\sum_{y}p(x,y)=\sum_{y=1}^{x}\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{y=1}^{x}1=\frac{2x}{n(n+1)}}$$

   De marginale verdeling voor de variabele Y in een waarde *y* vind je door te sommeren over alle mogelijke waarden van *x* die met *y* kunnen optreden: *x* = *y*... n

$$\boldsymbol{p_Y(y)=\sum_{x}p(x,y)=\sum_{x=y}^{n}\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{x=y}^{n}1=\frac{2(n-y+1)}{n(n+1)}}$$

c. X en Y zijn onafhankelijk als $\boldsymbol{p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)}$ voor elke mogelijke *x* en *y*.

   Dus als: $\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{2x}{n(n+1)}\dfrac{2(n-y+1)}{n(n+1)}$ voor elke mogelijke *x* en *y*.

   Dit is duidelijk niet het geval voor elke *x* en *y*, bvb voor $x=y=1$ bekom je

   $\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{2}{n(n+1)}\dfrac{2n}{n(n+1)}\Leftrightarrow 1=\dfrac{2}{n+1}$ en dit voldoet niet (tenzij als $n=1$ maar dan heb je geen veranderlijke meer, de enige waarden zijn dan immers $x=y=1$).

   X en Y zijn dus afhankelijk.

d. n = 5 : $p(x,y)=\frac{2}{5\cdot 6}=\frac{1}{15}, 1\le y\le x\le 5$

De gevraagde kans vind je door de kansverdeling te sommeren voor alle koppels (x,y) die voldoen aan alle gestelde ongelijkheden:

$\boldsymbol{x \le 3 \text{ en } y \le 2 \text{ en } 1 \le y \le x \le 5}$

$$P(X\le 3 \cap Y\le 2)=p(1,1)+p(2,1)+p(2,2)+p(3,1)+p(3,2)$$

$$=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$$