Oplossing oefening 81

Gegeven: We werpen tegelijkertijd met 2 onvervalste dobbelstenen.
X = het aantal 5-en bij die worp
Y = het aantal 6-en bij die worp.

Gevraagd:

(a) De kansverdeling van de 2-voudige veranderlijke $\overrightarrow{X} = (X, Y)$
X kan als waarden aannemen 0,1 of 2 , Y kan eveneens als waarden aannemen 0,1 of 2. We onderzoeken alle mogelijkheden.

i) $\overrightarrow{X} = (0,0)$ dus $X = 0, Y = 0$, de worp bevat geen enkele 5 en geen enkele 6. M.a.w beide dobbelstenen zijn 1,2,3 of 4. De kans op (0,0) is dus:

$$\begin{aligned} p(0,0) &= P((1^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4) \text{ } en \text{ } (2^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4)) \\ &= P(1^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4) \cdot P(2^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4) \\ &= \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

ii) $\overrightarrow{X} = (1,0)$ dus $X = 1, Y = 0$, de worp bevat een 5 en geen enkele 6. Dit kan enkel als de ene dobbelsteen een 5 is en de andere 1,2,3 of 4. De kans op (1,0) is dus:

$$\begin{aligned} p(1,0) &= P((1^e = 5 \text{ } en \text{ } 2^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4) \text{ } of \text{ } (1^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4 \text{ } en \text{ } 2^e = 5)) \\ &= P(1^e = 5 \text{ } en \text{ } 2^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4) + P(1^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4 \text{ } en \text{ } 2^e = 5)) \\ &= P(1^e = 5)P(2^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4) + P(1^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4)P(2^e = 5) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

iii) $\overrightarrow{X} = (0,1)$ dus $X = 0, Y = 1$, de worp bevat een 6 en geen enkele 5. De ene dobbelsteen is een 6 en de andere 1,2,3 of 4. De kans op (0,1) is dus:

$$\begin{aligned} p(0,1) &= P((1^e = 6 \text{ } en \text{ } 2^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4) \text{ } of \text{ } (1^e = 1,2,3 \text{ } of \text{ } 4 \text{ } en \text{ } 2^e = 6)) \\ &= ... = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

iv) $\overrightarrow{X} = (1,1)$ dus $X = 1, Y = 1$. De ene dobbelsteen is een 5 en de andere een 6. Dus:

$$\begin{aligned} p(1,1) &= P((1^e = 6 \text{ } en \text{ } 2^e = 5) \text{ } of \text{ } (1^e = 5 \text{ } en \text{ } 2^e = 6)) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

v) $\overrightarrow{X} = (2,0)$. Beide dobbelstenen zijn een 5:

$$p(2,0) = P(1^e = 5 \text{ } en \text{ } 2^e = 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

vi) $\overrightarrow{X} = (0,2)$. Beide dobbelstenen zijn een 6:

$$p(0,2) = P(1^e = 6 \text{ } en \text{ } 2^e = 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

vii) $\overrightarrow{X} = (2,1), (1,2), (2,2)$ zijn niet mogelijk want je gooit maar met 2 dobbelstenen. De kans op deze waarden is dus 0.

$$p(2,1) = p(1,2) = p(2,2) = 0$$

In tabelvorm ziet de kansverdeling er als volgt uit:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$4/9$	$2/9$	$1/36$
1	$2/9$	$1/18$	0
2	$1/36$	0	0

Deze verdeling is volledig symmetrisch in X en Y.

(b) Bepaal de kans dat $X+Y \geq 1$.
$X+Y \geq 1$ is voldaan voor de waarden (1,0),(0,1),(1,1),(2,0),(0,2) en dus is:
$$P(X+Y \geq 1) = p(1,0)+p(0,1)+p(1,1)+p(2,0)+p(0,2)$$
$$= \frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$
Eenvoudiger is echter te werken via het complement:
$$P(X+Y \geq 1) = 1 - P(X+Y<1) = 1 - p(0,0) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$
omdat hiervoor slechts 1 waarde, nl. (0,0) voor in aanmerking komt.

(c) Bepaal de marginale verdelingen van X en Y.
X kan 3 waarden aannemen, nl. 0,1,2 en hiervoor geldt:
$$p_X(0) = P(X=0) = \text{som over alle mogelijke waarden van y van } p(0,y)$$
$$= p(0,0)+p(0,1)+p(0,2)$$
$$= \frac{4}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{36} = \frac{25}{36}$$
(Merk op we tellen dus de waarden in de kolom onder de 0 op)
$$p_X(1) = P(X=1) = \text{som over alle mogelijke waarden van y van } p(1,y)$$
$$= p(1,0)+p(1,1)$$
$$= \frac{2}{9}+\frac{1}{18} = \frac{5}{18}$$
(waarden in de kolom onder de 1 optellen)
$$p_X(2) = P(X=2) = \text{som over alle mogelijke waarden van y van } p(2,y)$$
$$= p(2,0)$$
$$= \frac{1}{36}$$
(waarden in de kolom onder de 2 optellen)
Omdat de verdeling volledig symmetrisch is vinden we exact dezelfde waarden voor Y. (Voor de marginale verdeling van Y tellen we de rijen op, welke identiek zijn aan de respectievelijke kolommen)
$$p_Y(0) = P(Y=0) = \frac{25}{36},\ p_Y(1) = P(Y=1) = \frac{5}{18},\ p_Y(2) = P(Y=2) = \frac{1}{36}$$

(d) Zijn de veranderlijken X en Y onafhankelijk?
X en Y zijn onafhankelijk als voor elke mogelijke waarde van X en Y geldt dat:
$$p(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$
Is $p(0,0) = p_X(0) \cdot p_Y(0)$?

Neen: $p(0,0)=\frac{4}{9}\neq p_X(0)\cdot p_Y(0)=\frac{25}{36}\frac{25}{36}$
Voor de waarde (0,0) geldt de gelijkheid al zeker niet en dus zijn X en Y afhankelijk.

(e) Bereken de variantie-covariantie matrix van de meervoudige kansveranderlijke $\overrightarrow{X}=(X,Y)$.
De variantie-covariantie matrix ziet er als volgt uit:

$$\Sigma=\begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

We berekenen respectievelijk:

$$E(X)=0\cdot p_X(0)+1\cdot p_X(1)+2\cdot p_X(2)=0\cdot\frac{25}{36}+1\cdot\frac{5}{18}+2\cdot\frac{1}{36}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

$$E(Y)=idem=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} Var(X)&=E(X^2)-E(X)^2 \\ &=0^2\cdot p_X(0)+1^2\cdot p_X(1)+2^2\cdot p_X(2)-\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &=0\cdot\frac{25}{36}+1\cdot\frac{5}{18}+4\cdot\frac{1}{36}-\frac{1}{9}=\frac{5}{18} \end{aligned}$$

$Var(Y)=\frac{5}{18}$ (wegens de symmetrie van X en Y)

$$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$$

$$\begin{aligned} E(X\cdot Y)&=\sum_{\text{alle } x \text{ en } y} xy\cdot p(x,y) \\ &=0\cdot 0\cdot p(0,0)+1\cdot 0\cdot p(1,0)+0\cdot 1\cdot p(0,1)+2\cdot 0\cdot p(2,0)+0\cdot 2\cdot p(0,2)+1\cdot 1\cdot p(1,1) \\ &=p(1,1)=\frac{1}{18} \end{aligned}$$

Dus: $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)=\frac{1}{18}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{18}$

De variantie-covariantie matrix is dus:

$$\Sigma=\begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(f) Hoe sterk zijn X en Y gecorreleerd?
Hiertoe moet je de correlatiecoëfficiënt berekenen:

$$Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-\frac{1}{18}}{\sqrt{\frac{5}{18}}\sqrt{\frac{5}{18}}}=-\frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{18}}=-\frac{1}{5}=-0.2$$

X en Y zijn zwak tegengesteld gecorreleerd.