Oplossing oefening 72(a)

Gegeven:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9} & als\ 0\le x\le 3\\ 0 & elders\end{cases}$$

Gevraagd:

1. Verwachtingswaarde:

$$E\left[X\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{3} x\cdot\frac{x^2}{9}dx+\int_{3}^{+\infty} x\cdot 0dx$$

$$=0+\frac{1}{9}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3+0=\frac{1}{9}(\frac{81}{4}-0)=\frac{9}{4}=2.25$$

2. De standaardafwijking:

$$Var(X)=E\left[X^2\right]-(E\left[X\right])^2$$

$$E\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{3} x^2\cdot\frac{x^2}{9}dx+\int_{3}^{+\infty} x^2\cdot 0dx$$

$$=0+\frac{1}{9}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3+0=\frac{1}{9}(\frac{243}{5}-0)=\frac{27}{5}=5.4$$

$$Var(X)=\frac{27}{5}-(\frac{9}{4})^2=\frac{27}{80}=0.3375$$

$$\sigma_X=\sqrt{\mathrm{var}(X)}=0.5809$$

3. de mediaan: Dit is de waarde x_{med} waarvoor: $\int_{-\infty}^{x_{med}} f(x)dx=0.5$

   Omdat de mogelijke waarden voor X allemaal tussen 0 en 3 liggen zal de mediaan ook zeker in dit interval liggen en wordt de voorwaarde:

$$\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\frac{1}{9}\int_{0}^{x_{med}} x^2dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{9}(\frac{x_{med}^3}{3})=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{med}^3=\frac{27}{2}\Leftrightarrow x_{med}=\sqrt[3]{\frac{27}{2}}=2.3811$$

4. De modi.

   De grafiek van $y=\dfrac{x^2}{9}$ is een dalparabool met minimum in $x=0$ en de functie *f* is dus strikt stijgend in het interval [0,3]. Het maximum zal dus bereikt worden in $x=3$. De modus is 3.

5. het 0.8-kwartiel: Dit is de waarde $x_{0.8}$ waarvoor: $\int_{-\infty}^{x_{0.8}} f(x)dx=0.8$

   Deze waarde ligt zeker tussen 0 en 3, de voorwaarde wordt:

$$\frac{1}{9}\int_0^{x_{0.8}} x^2 dx = 0.8 \Leftrightarrow \frac{1}{9}(\frac{x_{0.8}^3}{3}) = 0.8 \Leftrightarrow x_{0.8}^3 = 21.6 \Leftrightarrow x_{0.8} = 2.7850$$

6. De scheefheid: $\gamma_X = \dfrac{E\left[(X-\mu_X)^3\right]}{\sigma_X^3}$

$$E\left[(X-\mu_X)^3\right] = E\left[X^3 - 3\mu_X X^2 + 3\mu_X^2 X - \mu_X^3\right]$$
$$= E\left[X^3\right] - 3E\left[X\right]E\left[X^2\right] + 3(E\left[X\right])^3 - (E\left[X\right])^3$$
$$= E\left[X^3\right] - 3E\left[X\right]E\left[X^2\right] + 2(E\left[X\right])^3$$

$$E\left[X^3\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f(x)dx = \int_0^3 x^3 \cdot \frac{x^2}{9}dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^3 = \frac{1}{9}(\frac{729}{6} - 0) = \frac{27}{2} = 13.5$$

Dus:

$$E\left[(X-\mu_X)^3\right] = \frac{27}{2} - 3\frac{9}{4}\frac{27}{5} + 2(\frac{9}{4})^3 = -\frac{27}{160} = -0.16875$$

$$\gamma_X = \frac{E\left[(X-\mu_X)^3\right]}{\sigma_X^3} = -\frac{27}{160}(\sqrt{\frac{80}{27}})^3 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{80}{27}} = -0.8607$$