Oplossing oefening 70

(a) Gegeven:

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-5x+1 \quad als \quad -\dfrac{1}{4}\le x\le 2\\ \quad 0 \qquad\qquad\qquad elders\end{cases}$$

Gevraagd: Is deze functie een kansdichtheid functie?
Voorwaarden:

- $f(x)\ge 0$ voor elke $x\in\mathbb{R}$

  Dit komt neer op: $4x^2-5x+1\ge 0$ voor $-\dfrac{1}{4}\le x\le 2$

  Nulpunten van $4x^2-5x+1$: $x=1$, $x=\dfrac{1}{4}$

  Tekenverloop:

x	$\frac{1}{4}$ 1
$4x^2-5x+1$	+ 0 - 0 +

  De functie is dus negatief tussen ¼ en 1. De eerste voorwaarde is dus al zeker niet voldaan. De functie is geen kansdichtheid functie

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{4}}0.dx+\int_{-\frac{1}{4}}^{2}(4x^2-5x+1)dx+\int_{2}^{+\infty}0.dx$$

  $$=\left[4\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+x\right]_{-\frac{1}{4}}^{2}=\left[\frac{32}{3}-10+2-(-\frac{1}{48}-\frac{5}{32}-\frac{1}{4})\right]=\frac{297}{96}=\frac{99}{32}\neq 1$$

  De 2de voorwaarde is ook niet voldaan.

Opmerking: het is voldoende dat 1 van beide voorwaarden niet voldaan is opdat de functie geen dichtheidfunctie zou zijn. Is een voorwaarde niet voldaan dan hoef je dus de andere voorwaarde niet meer te controleren. In deze oplossing zijn voor de volledigheid beide voorwaarden gecontroleerd.

(b) Gegeven:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad als \;\; x<x_0 \\ 2\dfrac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2} \;\; als \; x_0 \le x < \dfrac{x_0+x_1}{2} \\ -2\dfrac{(x_1-x)^2}{(x_1-x_0)^2} \;\; als \;\; \dfrac{x_0+x_1}{2} \le x < x_1 \\ 1 \;\; als \;\; x \ge x_1 \end{cases}$$

Gevraagd: Is deze functie een cumulatieve verdelingsfunctie?

Voorwaarden:

F is een functie die begint bij 0, strikt stijgend en continu is en die eindigt bij 1.

- F is continu:
  Discontinuïteit kunnen we enkel hebben in de overgangspunten:
  - $x = x_0 : 2\dfrac{(x_0-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2} = 0 \;\; Dit \; is \; voldaan$
  - $x = \dfrac{x_0+x_1}{2} : 2\dfrac{(\frac{x_0+x_1}{2}-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2} = -2\dfrac{(x_1-\frac{x_0+x_1}{2})^2}{(x_1-x_0)^2}$

    $\Leftrightarrow \dfrac{(x_1-x_0)^2}{2(x_1-x_0)^2} = -\dfrac{(x_1-x_0)^2}{2(x_1-x_0)^2} \Leftrightarrow 1=-1 \;\; Niet \; voldaan$
  - $x = x_1 : -2\dfrac{(x_1-x_1)^2}{(x_1-x_0)^2} = 1 \Leftrightarrow 0 = 1 \;\; Niet \; voldaan$
- F begint bij 0: is voldaan
- F eindigt bij 1: is voldaan
- F is strikt stijgend: De functiewaarde verspringt van 1 naar –1 (zie hoger), en wordt zelfs negatief in $\left[\dfrac{x_0+x_1}{2}, x_1\right]$ en is dus zeker niet overal stijgend. Deze voorwaarde is dus ook niet voldaan.

F is geen cumulatieve verdelingsfunctie. Zoals bij (a) is het voldoende dat 1 van de voorwaarden niet voldaan is.