Oplossing oefening 69

(a) Gegeven:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & als\ x \in [-1,3] \\ 0 & elders \end{cases}$$

Gevraagd:

1. Bepaal a zodat deze functie de kansdichtheid is van de stochastische veranderlijke X.

   Voorwaarden:
   - $f(x) \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$
   - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

   Dit geeft:

   $$\int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^{3} ax^2 dx + \int_{3}^{+\infty} 0 \cdot dx = 1$$

   $$\Leftrightarrow 0 + a\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} + 0 = 1$$

   $$\Leftrightarrow a\left(\frac{27}{3} - \frac{-1}{3}\right) = 1$$

   $$\Leftrightarrow a = \frac{3}{28}$$

2. Bepaal de cumulatieve verdelingsfunctie:

   $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ voor elke $x \in R$.

   Bij definitie van de gegeven functie *f* moeten we R opdelen in 3 deelverzamelingen, nl. $x < -1,\ x \in [-1,3]\ en\ x > 3$.

   We vinden:

   Als $x < -1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$

   Als $x \in [-1,3]$:

   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

   $$= \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \frac{3}{28}\int_{-1}^{x} x^2 dx$$

   $$= 0 + \frac{3}{28}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{x}$$

   $$= \frac{3}{28}\left(\frac{x^3+1}{3}\right) = \frac{1}{28}(x^3+1)$$

Als $x > 3$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \frac{3}{28}\int_{-1}^{3} x^2 dx + \int_{3}^{x} 0 \cdot dx$$

$$= 0 + \frac{1}{28}(27+1) + 0 = 1$$

(Voor de middelste integraal vul $x = 3$ in, in het vorige resultaat)

Samengevat:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{als} \;\; x < -1 \\ \frac{1}{28}(x^3+1) \quad \text{als} \;\; x \in [-1,3] \\ 1 \quad \text{als} \;\; x > 3 \end{cases}$$

3. $P(X \leq -1.5) = F(-1.5) = 0$
4. $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{8+1}{28} = \frac{19}{28} = 0.6786$

   Alternatief: $P(X \geq 2) = \int_{2}^{+\infty} f(x)dx = \frac{3}{28}\int_{2}^{3} x^2 dx + 0 = \frac{3}{28}(\frac{27-8}{3}) = \frac{19}{28}$
5. $P(-10 \leq X) = P(X \geq -10) = 1 - P(X \leq -10) = 1 - F(-10) = 1 - 0 = 1$

   wat logisch is want alle mogelijke waarden van X liggen tussen –1 en 3.
6. $P(X = 2.5) = 0$

   De kans dat een continue veranderlijke exact gelijk is aan een bepaalde waarde is steeds 0.

(b) Gegeven:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & als \;\; x < 1 \\ a\ln(x) & als \;\; x \in [1,5] \\ 1 & als \;\; x > 5 \end{cases}$$

Gevraagd:

1. Bepaal a zodat deze functie de cumulatieve verdelingsfunctie is van de stochastische veranderlijke X.

   Voorwaarden:
   F is een functie die begint bij 0, strikt stijgend en continu is en die eindigt bij 1.
   - F is continu:
     Discontinuïteit kunnen we enkel hebben in de overgangspunten, we stellen dus als voorwaarden:
     - $a\ln(1) = 0$ *Dit is steeds voldaan*
     - $a\ln(5) = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{\ln(5)}$
   - F begint bij 0: is voldaan
   - F eindigt bij 1: is voldaan
   - F is strikt stijgend: de functie ln is een strikt stijgende functie in het interval [1,5] dus is ook $F(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(5)}$ strikt stijgend in [1,5]

2. Bepaal de kansdichtheid:
   $f(x) = F'(x)$ voor elke $x \in R$.
   Dus:
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & als \;\; x < 1 \\ \dfrac{1}{\ln(5)}\dfrac{1}{x} & als \;\; x \in [1,5] \\ 0 & als \;\; x > 5 \end{cases}$$
   Kort:
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\ln(5)} & als \;\; x \in [1,5] \\ 0 & elders \end{cases}$$

3. $P(X \le -1.5) = F(-1.5) = 0$
4. $P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(5)} = 0.5693$
5. $P(-10 \le X) = P(X \ge -10) = 1 - P(X \le -10) = 1 - F(-10) = 1 - 0 = 1$
   wat logisch is want alle mogelijke waarden van X liggen tussen 1 en 5.
6. $P(X = 2.5) = 0$
   De kans dat een continue veranderlijke exact gelijk is aan een bepaalde waarde is steeds 0.