Oplossing oefening 64

Gegeven: De kansveranderlijke X met :

$$p(-1)=\frac{-1}{a},\ p(0)=\frac{-6}{a},\ p(1)=\frac{-3}{a},\ p(2)=\frac{-2}{a}$$

(a) p is een kansverdeling als de volgende voorwaarden vervult zijn:
+ $p(x)\geq 0$ voor elke mogelijke waarde van x. Dit is zo als $a<0$

+ Som over alle mogelijke waarden van x van $p(x)=1$.

Dit geeft: $p(-1)+p(0)+p(1)+p(2)=\frac{-1}{a}+\frac{-6}{a}+\frac{-3}{a}+\frac{-2}{a}=\frac{-12}{a}=1$

Waaruit: $\boxed{a=-12}$

De kansverdeling is dus:

$$p(-1)=\frac{1}{12},\ p(0)=\frac{1}{2},\ p(1)=\frac{1}{4},\ p(2)=\frac{1}{6}$$

(b) $P(X=0.5)=0$, 0.5 is immers geen mogelijke waarde van X.

$$P(X\leq 1.5)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

$P(X>2)=0$, want 2 is de grootste waarde die X kan aannemen.

(c) 0.4-kwantiel: Hiervoor hebben we de cumulatieve verdelingsfunctie nodig.

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad als \ \ x<-1 \\ \frac{1}{12} \ \ als \ \ \text{-}1\leq x<0 \\ \frac{1}{12}+\frac{1}{2}=\frac{7}{12} \ \ als \ \ 0\leq x<1 \\ \frac{7}{12}+\frac{1}{4}=\frac{5}{6} \ \ als \ \ 1\leq x<2 \\ \frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1 \quad als \ \ x\geq 2 \end{cases}$$

Omdat $F(-1)=\frac{1}{12}<0.4$ en $F(0)=\frac{7}{12}\geq 0.4$ is het 0.4-kwantiel gelijk aan 0.

Modus:

de kans in 0 is het grootst dus is 0 de modus

(d) Chebyshev voor $k=2$: $P(\left|X-E\left[X\right]\right|>2\sigma_X)\leq\frac{1}{4}$

Eerst verwachtingswaarde en standaardafwijking berekenen:

$$E\left[X\right]=-1\cdot\frac{1}{12}+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - (E\left[X\right])^2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{12} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Dus: $\sigma_X = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Hiermee wordt Chebyshev: $P(\left|X - \frac{1}{2}\right| > \sqrt{3}) \leq \frac{1}{4}$

De echte waarde van de kans is:

$$\begin{aligned}
P(\left|X - \frac{1}{2}\right| > \sqrt{3}) &= P(X - \frac{1}{2} > \sqrt{3} \text{ of } X - \frac{1}{2} < -\sqrt{3}) \\
&= P(X > \frac{1}{2} + \sqrt{3}) + P(X < \frac{1}{2} - \sqrt{3}) \\
&= P(X > 2.232\ldots) + P(X < -1.232\ldots) \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Dus is de ongelijkheid inderdaad voldoen: $0 \leq \frac{1}{4}$